

Dinazar Escudero-Ávila,
Nuria Climent,
M. Cinta Muñoz-Catalán y
Juan Pedro Martín-Díaz (eds.)

Tareas para la formación del profesorado para enseñar matemáticas

Tareas para la formación del profesorado para enseñar matemáticas

Proyecto PID2021-122180OB-I00 «Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: tareas y conocimiento del formador (MTSK-T&MTEK)», financiada por:



Proyecto ProyExcel_00297 «Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas, ciencias experimentales y ciencias sociales (MTSK STSK SCTSK)», financiado por:



Agradecemos la colaboración de:



Dinazar Escudero-Ávila, Nuria Climent,
M. Cinta Muñoz-Catalán
y Juan Pedro Martín-Díaz
(eds.)

Tareas para la formación
del profesorado
para enseñar matemáticas

Colección Horizontes-Universidad

Título: *Tareas para la formación del profesorado para enseñar matemáticas*

Primera edición: junio de 2026

© Dinazar Escudero-Ávila, Nuria Climent, M. Cinta Muñoz-Catalán
y Juan Pedro Martín-Díaz (eds.)

© De esta edición:

Ediciones OCTAEDRO, S. L.
C/ Bailén, 5 – 08010 Barcelona
Tel.: 93 246 40 02
[http: www.octaedro.com](http://www.octaedro.com)
email: octaedro@octaedro.com



Esta publicación está sujeta a la Licencia Internacional Pública de Atribución/Reconocimiento-
NoComercial 4.0 de Creative Commons. Puede consultar las condiciones de esta licencia si accede
a: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

ISBN: 978-84-1079-325-5

Corrección y maquetación: Palabra de Apache
Diseño de la cubierta: Tomàs Capdevila
Realización y producción: Octaedro Editorial

Publicación en acceso abierto - *Open access*

Sumario

Presentación	9
1. Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo.....	19
2. Introducción a la suma de fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de un modelo de áreas	45
3. Interpretación parte-todo de las fracciones	67
4. Evaluación del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas construido a través de la formulación de problemas de fracciones	85
5. Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción	93
6. El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo.....	111
7. Definición de polígono	135
8. Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza....	151
9. Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia	173
10. ¿Dónde están los polígonos en los poliedros?.....	195
11. Atribuyendo significado a la rotación.....	217

12. Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación de matemáticas en el contexto de división de fracciones	245
Sobre la edición	267
Índice de tablas y figuras.....	269
Índice	273

Presentación

Estimado formador:

En este libro encontrarás distintas propuestas de tareas diseñadas, analizadas e implementadas por grupo de investigadores en el área de la didáctica de la matemática que, como tú, formamos a profesorado de Educación Infantil (3-6 años), Educación Primaria (6-12 años) o Educación Secundaria Obligatoria (12 a 16 años) en relación con la enseñanza de las matemáticas, tanto en formación inicial como continua.

Este grupo de trabajo se especializa en la investigación sobre el conocimiento del profesorado para la enseñanza de las matemáticas y somos miembros de la RED MTSK (<https://redmtsk.net/>). La mayoría tenemos el doctorado en Educación Matemática o, en menor medida, en Matemáticas, o estamos en proceso de formación como estudiantes de doctorado en Educación Matemática. Estamos afiliados a instituciones universitarias españolas (Universidad Complutense de Madrid, Universidad de Cádiz, Universidad de Huelva, Universidad de Sevilla o Universidad de Valladolid) o de países de Latinoamérica (Brasil, Chile, México o Perú).

Este equipo de especialistas en la formación docente ha diseñado distintas tareas a las que denominamos «tareas formativas», cuyo objetivo es desarrollar conocimientos matemáticos especializados en el profesorado, ya sea en formación inicial o continua, en un determinado nivel escolar y en relación con un contenido matemático específico.

Las doce tareas formativas que te presentamos en este libro se han construido a partir del modelo de conocimiento profesional denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés, *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*) (Carrillo *et al.*, 2018). El modelo MTSK fue desarrollado en el grupo de investigación que dio origen a la RED MTSK, como forma de aproximarnos, mediante la investigación, a la problemática de qué conocimientos requiere

el profesorado para la enseñanza de las matemáticas. Para atender a esta cuestión, desarrollamos un conjunto de investigaciones coordinadas con profesorado en ejercicio de distintos niveles educativos y contextos. De este modo, llegamos a caracterizar los elementos principales del conocimiento específico que moviliza un profesor en su práctica profesional en relación con la enseñanza de las matemáticas: conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés, *Mathematical Knowledge*), conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés, *Pedagogical Content Knowledge*) y concepciones sobre las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje.

Para el diseño de estas tareas formativas nos hemos apoyado en el modelo MTSK y sus dominios, así como en los diferentes subdominios y categorías desarrollados a partir del estudio de la naturaleza de estos contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje y del trabajo del profesorado al enseñar estos contenidos (figura 1).

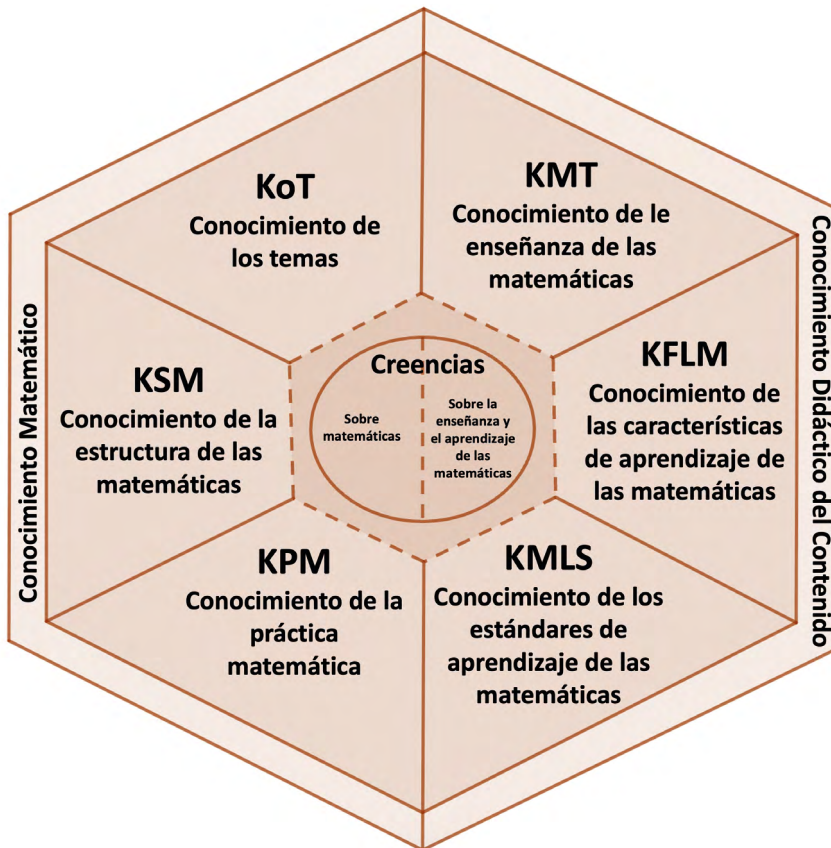


Figura 1. *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), con sus dominios y subdominios.

Dentro del conocimiento matemático, el modelo considera el conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés, *Knowledge of Topics*), el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, *Knowledge of the Structure of Mathematics*) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM, *Knowledge of Practices in Mathematics*). Cada una de estas categorías de conocimiento constituye un subdominio del dominio «Conocimiento matemático» (parte izquierda de la figura 1).

El KoT reconoce la necesidad de que el profesorado conozca los procedimientos y conceptos matemáticos en profundidad (es decir, saber definiciones, conocer propiedades y reconocer los fundamentos de estos conceptos), además de las representaciones y las situaciones que les dan sentido. El KSM supone que el profesorado requiere conocer las matemáticas de forma estructurada, establecer conexiones entre objetos matemáticos de distintos temas (por ejemplo, desde el punto de vista de la simplificación, la complejización, las grandes ideas que atraviesan diferentes temas o los elementos matemáticos que sirven de herramienta en otros temas). Por último, el KPM da cabida al conocimiento de las prácticas o formas de hacer matemáticas, lo que implica generar conocimiento matemático. Esto supone conocer las reglas de sintaxis de las matemáticas, incluido cómo se demuestra, cómo se define, cómo se resuelven problemas y cuál es papel del lenguaje matemático (Carrillo *et al.*, 2022).

Por su parte, el conocimiento didáctico del contenido abarca conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas, sobre su aprendizaje y sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas (respectivamente, KMT, por sus siglas en inglés, *Knowledge of Mathematics Teaching*; KFLM, *Knowledge of Features of Learning Mathematics*, y KMLS, *Knowledge of Mathematics Learning Standards*).

El KMT recoge el conocimiento del profesorado sobre estrategias y recursos —incluidas tareas y ejemplos— para enseñar diferentes contenidos matemáticos, así como posibles teorías que los fundamenten. El KFLM responde a la necesidad de considerar cómo suele abordar el alumnado de un determinado nivel un contenido matemático concreto, qué dificultades y qué potencialidades se presentan en su aprendizaje, qué expectativas y motivaciones suele despertar en el alumnado, así como posibles teorías que fundamenten una aproximación al aprendizaje de los contenidos matemáticos. Por último, el KMLS se refiere al conocimiento de cómo se sitúa lo que se está enseñando en los estándares curriculares propios del contexto donde se enseña, junto con otras posibles recomendaciones sobre la capacidad del alumnado para comprender, construir y utilizar las matemáticas. Las concepciones del profesorado se refieren a sus ideas e imágenes sobre qué son las matemáticas, cómo se generan, cómo se aprenden y cómo se enseñan.

Aunque el diseño y refinamiento de las tareas formativas que presentamos se fundamentan en el modelo MTSK, como ya se ha señalado, hemos procurado describirlas sin que sea necesario el conocimiento del modelo. De este modo, el lector no familiarizado con esta perspectiva teórica puede seguir las propuestas sin dificultad. Para estos lectores que deseen conocer mejor el modelo, sugerimos consultar algunas referencias introductorias al modelo MTSK (además de las ya citadas: Climent *et al.*, 2021; Escudero-Ávila *et al.*, 2015; Muñoz-Catalán *et al.*, 2015). El lector familiarizado o interesado en profundizar puede encontrar una explicación más detallada del conocimiento especializado que se pretende desarrollar con cada tarea formativa en las tablas de conocimiento especializado organizadas por dominio, subdominio y categoría, de acuerdo con la tabla 1, que se incluyen como parte de cada tarea.

Tabla 1. Dominios, subdominios y categorías de conocimiento del modelo MTSK. (Adaptación de Escudero-Ávila, 2023, basada en Carrillo *et al.*, 2022).

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio		
Conocimiento matemático	KoT	Fenomenología y aplicaciones		
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos		
		Registros de representación		
		Procedimientos	¿Cómo se hace?	
			¿Cuándo puede hacerse?	
			¿Por qué se hace así?	
			Características del resultado	
		KSM	Conexiones de complejización	
			Conexiones de simplificación	
			Conexiones transversales	
	Conexiones auxiliares			
	KPM	La práctica de demostrar	Desarrollo de demostraciones	
			Métodos y tipos de demostración	
			Funciones de la demostración	
		La práctica de definir	Características de la definición	
La práctica de resolver problemas		Estrategias para resolver problemas		
El papel del lenguaje matemático	Papel de los símbolos			
	Uso del lenguaje			

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio	
Conocimiento didáctico del contenido	KMT	Teorías sobre enseñanza	Personales
			Institucionales
		Recursos didácticos (físicos y digitales)	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	
	KFLM	Teorías sobre aprendizaje	Personales
			Institucionales
		Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	
		Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático	
		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	
	KMLS	Resultados de aprendizaje esperados	
Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado			
Secuenciación de temas			

Cada una de las tareas formativas de este material se divide en tres bloques:

1. Una descripción detallada de los fundamentos teóricos y metodológicos a partir de los cuales se ha diseñado la tarea, las actividades propuestas, sus objetivos, los materiales necesarios y las orientaciones didácticas que debe conocer quien dirige la formación.
2. Una tabla detallada de los conocimientos matemáticos especializados (desde la perspectiva del modelo MTSK), organizada por subdominio y categoría, que se pretenden desarrollar en cada una de las actividades propuestas en la tarea.
3. Hojas de trabajo para cada tarea formativa, diseñadas para que quien dirige la formación las utilice directamente en el aula. Estas hojas estarán también disponibles para descargar en formato editable.

Las tareas formativas que presentamos están orientadas a la formación inicial de profesorado de Educación Primaria (ocho tareas), a la formación inicial de profesorado de Educación Infantil (la primera tarea) o a la formación de profesorado de Educación Secundaria (las tres últimas tareas: la primera de ellas, orientada a la formación inicial, y las restantes, a la continua).

A continuación presentamos brevemente el contenido de las tareas y su organización en el libro.

La primera tarea formativa, «Construcción de una definición en Educación Infantil. El caso del rectángulo», está dirigida al futuro profesorado de Educación Infantil y busca suscitar una reflexión sobre las características de una definición y el papel que desempeñan los distintos tipos de propiedades de un determinado concepto en ella. Además, pretende que se reconozca la práctica de definir como propia del trabajo matemático, lo cual requiere un desarrollo de habilidades desde Educación Infantil. La tarea parte de la comprensión de que la identificación y la comparación son procedimientos matemáticos precursores de la definición y resultan fundamentales en esta etapa.

A continuación presentamos tres tareas orientadas a la formación inicial de profesorado de Educación Primaria en relación con la enseñanza de las fracciones (las dos primeras centradas en el desarrollo de conocimiento especializado y la tercera en su evaluación). La tarea formativa «Introducción a la suma de fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de un modelo de áreas» busca que el profesorado en formación reconozca las características matemáticas y didácticas del modelo de áreas como recurso manipulativo para introducir la suma de fracciones en Primaria. A través del análisis y la discusión de actividades, se implica al profesorado en formación en la problemática de la introducción al trabajo con las operaciones con fracciones en la enseñanza básica y con los significados propios del concepto de fracción. Por su parte, en la tarea «Interpretación parte-todo de las fracciones», el profesorado en formación puede reflexionar sobre los significados de fracción parte-todo y operador a partir de una situación de reparto equitativo. Esto ayudará a identificar que el número racional expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad (todo o unidad), además de analizar posibles dificultades del alumnado de Educación Primaria al resolver este tipo de problemas. Por último, la tarea «Evaluación del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas construido a través de la formulación de problemas de fracciones» tiene por objetivo evaluar el KoT y el KFLM del profesorado en formación en relación con las fracciones y los problemas aditivos y multiplicativos, así como identificar dificultades en la formulación de problemas. Con esta tarea, quien dirige la formación tiene la oportunidad de revisar los conocimientos desarrollados y de revisar o visitar conceptos relacionados con este contenido.

La siguiente tarea persigue el desarrollo de conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en el futuro profesorado de Primaria. En esta, denominada «Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción», se procura que el profesorado en formación reconozca el razonamiento probabilístico como resultado de una actitud racional frente a la incertidumbre o la falta de información, y

desarrolle conocimiento matemático sobre inferencia estadística informal a través del trabajo con situaciones distintas de las clásicas de dados y urnas de composición conocida, relacionadas con la predicción.

Hemos querido incluir una tarea formativa que aborde la enseñanza inclusiva de las matemáticas. Por ello, la tarea «El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo» acomete la formación para trabajar en el aula de Primaria la práctica de generalizar desde una perspectiva inclusiva. Así, en esta tarea se propone resolver un problema de generalización para que el profesorado en formación discuta distintas estrategias de resolución y reflexione sobre las posibles dificultades que podría encontrar el alumnado de Primaria al resolverlo. Además, se busca que el profesorado en formación examine las estrategias de resolución manifestadas por escolares con síndrome de Asperger (TEA) y reflexione sobre las características que pueden influir en el proceso de resolución en estos casos.

A continuación nos centramos en la formación inicial para la enseñanza de polígonos en Primaria, con dos tareas formativas en torno a la definición de polígono. La tarea «Definición de polígono» busca desarrollar la mirada profesional del profesorado en formación sobre la identificación del pensamiento del alumnado, la interpretación y diseño de actividades. Además, se pretende propiciar la reflexión sobre las características de la práctica matemática de definir en el contexto de los polígonos mediante la identificación de ejemplos, contraejemplos y no ejemplos útiles para establecer una definición del concepto de polígono. Seguidamente se propone la tarea «Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza», en la que el profesorado en formación, además de identificar los elementos matemáticos que componen la definición de polígono, pueda contribuir al aprendizaje de la práctica matemática de definir en el alumnado de Primaria y valorar el papel de los contraejemplos como herramienta de validación en el aula, analizar posibles dificultades de los estudiantes de Primaria y considerar las potencialidades y limitaciones de los conjuntos de ejemplos para la enseñanza.

Seguidamente se muestran dos tareas que pueden emplearse para la formación de maestros de Primaria o Secundaria, puesto que el contenido se sitúa en el momento de tránsito entre ambas etapas. En primer lugar se presenta la tarea «Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia». En ella se busca que el profesorado en formación sea capaz de detectar relaciones y patrones que permitan la formulación y comprobación de conjeturas matemáticas, diferencie entre razonamientos inductivos, deductivos y abductivos, y reconozca su papel en la construcción y validación del conocimiento matemático. Además, se proponen

actividades para explorar el potencial de GeoGebra como *software* de geometría dinámica para formular y comprobar conjeturas, frente al uso de herramientas físicas de dibujo. Se busca también la reflexión sobre los procesos de conjeturar y demostrar, y la relación de posibles comportamientos en estos procesos con los niveles de Van Hiele. Posteriormente se propone la tarea formativa «*¿Dónde están los polígonos en los poliedros?*», en la que el profesorado en formación, además de reflexionar sobre las implicaciones de las prácticas matemáticas de definir y de clasificar en geometría, reconoce elementos y características de cuerpos geométricos traslúcidos y opacos, y establece relaciones y diferencias respecto de las figuras geométricas planas. En esta tarea también se analizan errores y dificultades de aprendizaje que pueden presentarse en el aula cuando se estudian los cuerpos geométricos en Primaria, y se evalúan la potencialidad y las limitaciones de diversas actividades de enseñanza de poliedros, así como del uso de recursos didácticos en la planificación de clases.

Cerramos el conjunto con dos tareas formativas para la formación continua del profesorado de Secundaria. En primer lugar se presenta la tarea «Atribuyendo significado a la rotación», cuyo objetivo es que el profesorado desarrolle su conocimiento interpretativo (Mellone *et al.*, 2020) mediante el análisis de producciones del alumnado y la identificación de las principales dificultades y errores que este suele cometer en el ámbito de la rotación. Se pretende también ampliar su conocimiento especializado sobre las propiedades, fundamentos y definición de rotación, los procedimientos empleados para identificarla, así como las conexiones entre la rotación y otras transformaciones geométricas isométricas y la simetría. Por último, se presenta la tarea «Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado de matemáticas en el contexto de división de fracciones». En ella se busca que el profesorado en formación plantee distintas estrategias para resolver divisiones de fracciones, como la estimación, reflexione sobre posibles dificultades del alumnado de Educación Secundaria, reconozca estrategias de enseñanza inclusiva para atender dichas dificultades basadas en el uso de material manipulativo y de representación pictórica, plantee problemas que den sentido a esta operación y evalúe los procedimientos del alumnado.

Como puede constatarse, las tareas abordan la formación en relación con distintos tópicos matemáticos (aritméticos, geométricos, probabilísticos) y con diferentes prácticas matemáticas (como generalizar, demostrar o definir). En ocasiones hemos querido mostrar cómo puede abordarse el desarrollo de conocimiento especializado sobre la enseñanza de un tema de diversos modos o para diferentes niveles educativos (por ejemplo, Educación Infantil y Educación Primaria), lo que nos ha llevado a presentar varias tareas en torno a mismo contenido. Además, en su

conjunto, las tareas ofrecen ejemplos de desarrollo de conocimiento relativos a los diferentes subdominios del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, si bien cada una se centra en subdominios o categorías concretos.

Deseamos que este conjunto de tareas resulte útil tanto para la práctica como para la reflexión y el estudio de quienes formamos a profesorado para la enseñanza de las matemáticas.

Los editores

Referencias

- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Carrillo, J., Montes, M. A. y Climent, N. (eds.). (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.
- Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Educación Matemática*, 33(1), 98-124.
- Escudero-Ávila, D. (2023). Relaciones entre el uso del pensamiento matemático flexible y el desarrollo de conocimientos especializados en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. L. Piñeiro, N. Pizarro y E. Carrasco (eds.), *Actas de las XXVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 36-43). Fondo Editorial UMCE.
- Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 10(1), 53-77.
- Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P. y Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, 22(2), 154-167.
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 589-605.

1. Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo

M. Cinta Muñoz-Catalán

<https://orcid.org/0000-0003-2329-7612>

Universidad de Sevilla (España)

M. Mar Liñán-García

<https://orcid.org/0000-0003-1328-3356>

Universidad de Sevilla (España)

Víctor J. Barrera-Castarnado

<https://orcid.org/0000-0002-2276-0129>

Universidad CEU Fernando III, CEU Universities (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Infantil

Duración aproximada de la aplicación: 4 horas

Fundamentación

«La definición» es una práctica genuina del trabajo matemático. En contextos escolares, la práctica de definir aporta elementos que considerar en el proceso de conceptualización, el cual pretende sistematizar el conocimiento existente (descriptivo o *a posteriori*) o producir conocimiento nuevo (constructivo o *a priori*) (De Villiers, 2009). Diversos autores (p. ej., Leikin y Zazkis, 2010) consideran importante que esta práctica forme parte del repertorio de conocimiento del profesor de matemáticas y nosotros hemos extendido esta consideración al profesorado de Educación Infantil (EI).

Cabe cuestionarse por qué proponemos trabajar con la práctica de definir en la formación inicial del profesorado de EI si en sus clases

no se abordan definiciones formales, al no ser estas un objetivo de aprendizaje del alumnado de esta etapa. En primer lugar, este trabajo, junto con el enfoque adoptado a lo largo de su formación en el grado, permite al futuro profesorado conocer las características de la matemática como disciplina científica. Así, es importante que conozca los rasgos de una definición formal y el papel de las propiedades relevantes, irrelevantes e incorrectas en su proceso de construcción. Además, al particularizar en un concepto concreto, como el rectángulo, el profesorado en formación reconoce y reflexiona sobre nociones como la «minimalidad» y la «jerarquía» de una definición (Escudero *et al.*, 2014), lo cual le ayuda a valorar la importancia del rigor matemático y de la precisión del lenguaje. En segundo lugar, trabajar la definición permite abordar las figuras geométricas en esta etapa con un enfoque matemático más formal y robusto, es decir, establecer las bases conceptuales y de razonamiento para la construcción de definiciones en cursos posteriores.

Reconocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico permite al profesorado de EI saber cómo razona su alumnado, cómo visualiza las figuras geométricas y hacia dónde orientarlo. Dado que el alumnado suele observar las figuras como un todo, el profesorado debe fomentar que fragmente esa imagen global para identificar sus elementos constitutivos y sus propiedades (Gutiérrez y Jaime, 1998). Así, es crucial que el profesorado en formación de EI reflexione sobre qué propiedades puede conocer el alumnado, cuáles es capaz de intuir y qué procesos lo ayudan a fragmentar analíticamente las figuras geométricas para identificar dichas propiedades. La comparación entre figuras geométricas y la identificación de propiedades son prácticas matemáticas precursoras del proceso de definición; de hecho, este enfoque se ha propuesto como caracterizador del subdominio de conocimiento de la práctica matemática en este perfil profesional (Muñoz-Catalán *et al.*, 2022).

El conocimiento de la diferenciación entre imagen y definición de un concepto (Tall y Vinner, 1981) permite al profesorado tomar decisiones sobre qué ejemplos y contraejemplos seleccionar; qué conjunto de imágenes puede ser potente y adecuado para la edad del alumnado y qué tipos de actividades ayudarán a este a construir nuevos conocimientos junto con los procedimientos precursores de la definición antes mencionados.

Esta tarea ayuda al profesorado en formación a reconstruir su conocimiento geométrico y a tomar conciencia de sus propias limitaciones conceptuales, lo cual es fundamental para una mejora continua.

Objetivos generales

Se busca que el profesorado en formación:

1. Comprenda las características de una definición y el papel que juegan los distintos tipos de propiedades de un determinado concepto en ella (relevantes, irrelevantes e incorrectos).
2. Desarrolle la práctica matemática de definir.
3. Defina un objeto geométrico: el rectángulo.
4. Conozca cómo se construye la definición en EI.
5. Entienda la diferencia entre «imagen del concepto» y «definición de concepto» y su papel en la construcción de la definición desde la perspectiva del aprendizaje.
6. Identifique qué conjuntos de imágenes serían potentes para que el alumnado construya la definición de rectángulo.
7. Reconozca que la identificación y la comparación son procedimientos matemáticos precursores de la definición y son clave en EI.
8. Valore el papel de la práctica matemática de definir en EI como modo de promover el avance en la comprensión de los conceptos geométricos.
9. Identifique la definición como práctica matemática en EI.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

El profesorado en formación de EI que aborde esta tarea debería dominar la noción geométrica de espacio (diferenciándola de la que manejan otras disciplinas) y conocer las orientaciones para trabajar este contenido tanto de asociaciones profesionales —como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)—¹ como del currículo oficial, entre otras.

Asimismo, es necesario que el profesorado en formación haya reflexionado sobre qué es y qué no es tener conocimiento geométrico. Siguiendo a Canals (1997), el conocimiento geométrico no consiste en saber identificar visualmente determinadas formas y saber nombrarlas. El conocimiento geométrico implica necesariamente los siguientes procesos: la «exploración» consciente del espacio; la «comparación» de elementos y el «establecimiento de relaciones» entre ellos; y la «expresión verbal» tanto de las acciones realizadas como de las propiedades observadas, con la finalidad de conseguir su «interiorización». Esta autora advierte de que,

1. El NCTM es una organización estadounidense dedicada a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

cuando se prescinde de dicha exploración —como ha ocurrido habitualmente en la enseñanza de la geometría—, el conocimiento resultante es meramente memorístico y no geométrico. Pero también señala que, si la exploración del espacio carece de actividad consciente y reflexiva, el conocimiento resultante es meramente sensorial o motórico.

Estos procesos van seguidos de otros más sofisticados: «descubrir propiedades de las figuras y transformaciones; construir modelos para expresar dichas propiedades plásticamente; combinar las nociones, destrezas y resultados obtenidos; elaborar conclusiones a partir de ellos, y finalmente formular unas primeras leyes generales» (Canals, 1997, p. 32). Estos últimos procesos no son objeto de interés en la etapa de EI.

Por último, sugerimos a quien dirige la formación que, antes de comenzar con la actividad, solicite al profesorado en formación leer de forma individual las características de una definición en matemáticas que aparecen en Escudero et al. (2014).

Orientaciones generales para quien dirige la formación

La tarea aborda elementos de conocimiento especializado del profesorado en formación de EI en relación con las figuras geométricas y su definición, particularizando la reflexión en el caso del rectángulo. Primero, el profesorado realiza las actividades de forma individual y luego, en equipos de 4 o 5 personas, discute y consensúa sus respuestas, que recogerá en un documento. A continuación, se produce la discusión en gran grupo. Es importante que diferencien su trabajo inicial de lo que después corrigen o completan tras el debate para hacerse conscientes de sus errores y de su aprendizaje. Dicho documento formará parte de la evaluación de la tarea.

En los momentos de trabajo en grupo, quien dirige la formación observa el trabajo que desarrolla el profesorado en formación y lo ayuda a reflexionar, profundizar y avanzar. En la discusión ha de atender al rigor y a la precisión del lenguaje, promover la participación general y propiciar la variedad y riqueza de las respuestas.

En el resto de la tarea solo se mencionará al formador si se requiere que desempeñe un papel específico.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Hojas de trabajo para el profesorado en formación en formato físico o digital editable.

Actividad 1. Externalización de la imagen conceptual y construcción de una primera definición del rectángulo

Descripción

La actividad comienza con la puesta en común de la lectura de las características de una definición en matemáticas de Escudero *et al.* (2014). Se espera que, a lo largo de la tarea, el profesorado vaya dotándolas de significado, aunque conviene incidir en las características de «jerarquía» y «minimalidad».

A continuación, cada miembro del grupo externaliza su imagen del concepto dibujándola en el documento, ya sea a mano alzada o usando alguna herramienta como GeoGebra. Después, el grupo proporciona una definición consensuada y se realiza una puesta en común ágil que permita comparar las imágenes dibujadas y las definiciones propuestas.

Objetivos específicos

- ▶ Tomar conciencia de la imagen que el profesorado en formación tiene del concepto de rectángulo y compararla con la de sus pares.
- ▶ Construir de manera consensuada una definición de rectángulo aplicando las características de una definición según Escudero *et al.* (2014).

Orientaciones didácticas

Quien dirige la formación deberá tener en cuenta que normalmente el profesorado en formación:

- ▶ Suele coincidir en la posición estándar del rectángulo e incluso, en algunos casos, asignarle un color específico, principalmente el azul.
- ▶ No suele reparar en la coincidencia de las representaciones y comienzan a redactar la definición de rectángulo sin considerar las características de la definición leídas previamente.
- ▶ Tiende a incluir el mayor número de propiedades posibles (con lo cual resulta redundante) y a enfatizar la diferencia de longitud entre los lados contiguos, lo que excluye al cuadrado de la definición.
- ▶ Emplea un lenguaje que carece de precisión y de rigor.

Quien dirige la formación no debe intervenir para cuestionar o corregir; lo interesante es que ponga de relieve que la mayoría del profesorado en formación, si

no la totalidad, ha coincidido en la representación del rectángulo. Es suficiente con que uno o dos grupos expongan la definición y solo se solicite la intervención de los demás si esta incluyera alguna característica no contemplada anteriormente o si alguien quisiera matizar o corregir alguna idea.

Actividad 2. Selección de rectángulos en un conjunto de figuras planas y justificación de las figuras que no lo son

Descripción

Al comienzo de la actividad, el profesorado en formación trabaja en sus respectivos grupos. Se le muestra la figura 1.1 y se le pregunta: «¿todas las figuras podrían considerarse ejemplos de rectángulos?». Si la respuesta es negativa, ha de justificar por qué.

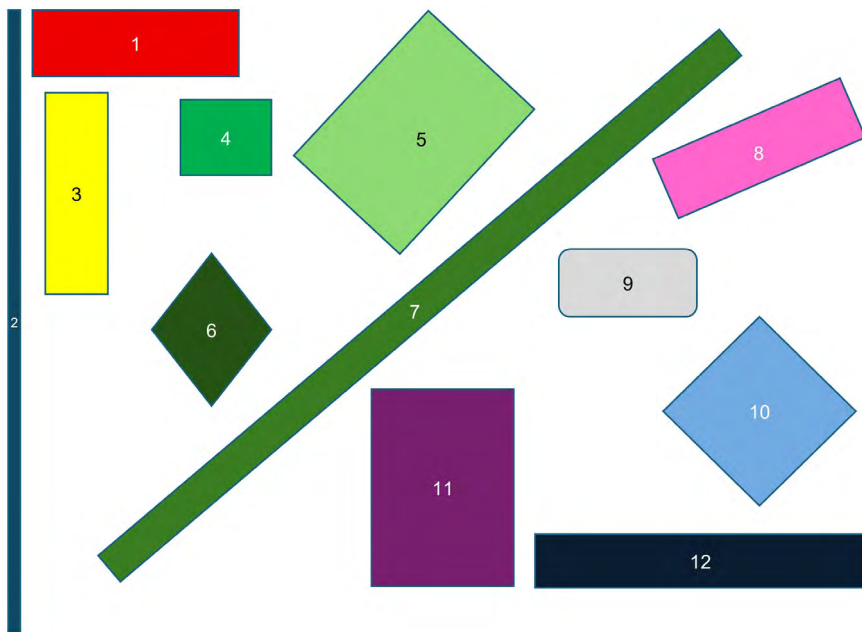


Figura 1.1. Ejemplos de figuras geométricas que podrían o no ser rectángulos.

A continuación, se realiza una puesta en común en la que quien dirige la formación puede dibujar una tabla en la pizarra para recopilar qué figuras geométricas identifica el profesorado en formación como rectángulos, cuáles no y por qué.

Objetivos específicos

- ▶ Enriquecer el imaginario conceptual del profesorado en formación en relación con el rectángulo.
- ▶ Identificar diferentes representaciones gráficas del rectángulo que son equivalentes.
- ▶ Reconocer figuras geométricas que no son rectángulos e identificar las propiedades incorrectas respecto del concepto.

Orientaciones didácticas

Normalmente, el profesorado en formación excluye de la clase de los rectángulos la figura 9, por sus esquinas redondeadas; la figura 6, por ser «un rombo», y la figura 10, por ser «un cuadrado». Ante esta situación, quien dirige la formación puede tener preparado un cuadrado, ponerlo en la posición estándar (con un lado paralelo a la horizontal), girarlo y preguntar en qué figura se ha convertido para incidir en la irrelevancia de la posición.

La figura 4 suele generar más debate porque la longitud de sus lados contiguos es muy similar. El profesorado en formación suele basar su discurso en apreciaciones perceptivas; conviene orientarlo hacia argumentos más rigurosos. Por ejemplo, quien dirige la formación puede sugerirle que utilice una tira de papel o un instrumento similar para comparar la longitud de los lados contiguos y comprobar si es la misma.

Se ha optado por usar el color para representar las figuras geométricas, puesto que se pretende poner de relieve la superficie y no solo el contorno. Si quien dirige la formación lo considera oportuno, puede repartir las figuras geométricas recortadas en cartulina o un material similar; de este modo, el profesorado en formación podría observar que la posición espacial es una propiedad irrelevante, algo que tendrá en cuenta tanto para en esta actividad como en la siguiente. Quien dirige la formación decidirá qué otros posibles ejemplos (con otra inclinación o medida) o contraejemplos (figura abierta, con lado curvo, etc.) puede incluir aquí, con el fin de aportar variedad a la pregunta 6.2 de la actividad 6.

Actividad 3. Identificación de las propiedades que tiene o no el rectángulo

Descripción

El profesorado en formación, organizado por grupos, debe elaborar un listado de las propiedades que observa en el conjunto de figuras geométricas identificadas como rectángulos y otro con las propiedades de las figuras consideradas no rectángulos.

En la segunda fase de puesta en común, quien dirige la formación puede dibujar en la pizarra una tabla de dos columnas donde recopilar las propiedades que indica el profesorado en formación. Esta disposición facilita la comparación y la identificación de propiedades en las que no se suele reparar inicialmente.

Objetivo específico

- ▶ Identificar exhaustivamente las propiedades del rectángulo como consecuencia de «desmenuzar» o «descomponer» el concepto.

Orientaciones didácticas

Puede que algunos grupos identifiquen varias propiedades, pero solo de tipo estructural. Quien dirige la formación puede proporcionar una propiedad a modo de ejemplo que sirva de inspiración al profesorado en formación para pensar en otras relacionadas, como, por ejemplo, figura cerrada.

En la puesta en común se debe propiciar que emerjan todas las propiedades posibles (como figura geométrica plana y polígono). También es interesante que el profesorado reflexione sobre propiedades más estructurales, como la simetría, la concavidad o la convexidad de los ángulos. En el caso de las propiedades de las figuras geométricas que no son rectángulos, pueden considerarse otras figuras geométricas no representadas en la figura 1.1. Interesan tanto las propiedades más estructurales (medida de ángulos, paralelismo de lados opuestos) como las precursoras (figura plana, cerrada, que tiene superficie). El objetivo es, por un lado, «descomponer» el concepto de rectángulo, lo que permitirá abordar otras actividades relacionadas con su aprendizaje en infantil, y, por otro lado, sentar las bases para que el profesorado en formación relacione propiedades matemáticas, algo necesario para poder construir una definición formal en matemáticas.

En este momento resultará útil, por ejemplo, que surjan propiedades como: polígono, figura cerrada, contorno y superficie, cuadrilátero, paralelogramo. En actividades posteriores se abordarán las relaciones jerárquicas entre ellas.

Actividad 4: Identificación de propiedades relevantes, irrelevantes e incorrectas del concepto de rectángulo y construcción de una definición formal

Descripción

En el documento de trabajo grupal, el profesorado en formación dispone de una caracterización de las propiedades relevantes, irrelevantes e incorrectas de un concepto. Quien

dirige la formación debe completar esta información explicando el papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción del concepto: las propiedades relevantes e irrelevantes están presentes en los ejemplos; las propiedades incorrectas, en los contraejemplos.

A continuación, el profesorado en formación debe determinar de qué tipo son las propiedades identificadas en la actividad anterior. Se le invita a completar una tabla de tres columnas para facilitar la comparación.

En la puesta en común, quien dirige la formación recoge las respuestas de todos los equipos en la pizarra en una tabla con idéntica estructura. En la columna de las propiedades relevantes conviene diferenciar aquellas que son críticas y que, por tanto, habrá que considerar para la construcción de la definición.

A continuación, se pide al profesorado que construya de nuevo una definición formal del concepto de rectángulo, atendiendo a las propiedades identificadas como críticas (dentro de las relevantes) y a las características de una definición en matemáticas (Escudero *et al.*, 2014). Esta tarea se realiza en grupo para elaborar una propuesta consensuada.

Objetivos específicos

- ▶ Conocer los tres tipos de propiedades (relevantes, irrelevantes e incorrectas) y el papel que juega cada tipo en el proceso de construcción de una definición en matemáticas.
- ▶ Saber identificar las propiedades relevantes (y críticas), irrelevantes e incorrectas respecto del concepto de rectángulo.
- ▶ Reconocer el papel de los ejemplos y los contraejemplos en la construcción de un concepto.
- ▶ Comprender cómo el abuso de propiedades irrelevantes en los ejemplos limita la construcción del concepto.
- ▶ Identificar propiedades presentes en los ejemplos que actúan como distractores para el alumnado de EI en la construcción del concepto de rectángulo.
- ▶ Construir una definición formal de rectángulo considerando las características de una definición en matemáticas y los atributos trabajados en las actividades anteriores.

Orientaciones didácticas

A lo largo de esta actividad, el profesorado en formación suele confundir las propiedades irrelevantes con las incorrectas. Conviene aprovechar esta confusión para trabajar varios aspectos. En primer lugar, destacar cuáles serían las propiedades irrelevantes del concepto de rectángulo (por ejemplo, que el lado de mayor longitud sea paralelo a la horizontal o que un lado mida aproximadamente el doble que el contiguo. En segundo lugar, explicar que estas propiedades condicionan el razonamiento que los aprendices y que, por ello, conviene variar los ejemplos. Por último,

es importante que el profesorado valore en qué medida estas propiedades están presentes en la figura que representó en la actividad 1.

Con el fin de preparar el trabajo posterior sobre la construcción de la definición formal de rectángulo, una vez completada la tabla, conviene que el profesorado relacione las siguientes propiedades relevantes: figura plana, figura cerrada, polígono, cuadrilátero y paralelogramo. Las tres últimas suelen presentar especial dificultad.

Cuando el profesorado en formación construye su definición, quien dirige la formación debe alentarle a que valore la corrección matemática de esta y el cumplimiento de los requisitos discutidos. Es posible que las definiciones que proporcione el profesorado en formación sigan siendo redundantes y no respeten el criterio de jerarquía, debido a la dificultad para relacionar propiedades. Las respuestas a esta actividad pueden servir para evaluar cómo se desarrolla el conocimiento del profesorado a lo largo de la actividad.

No es necesaria la puesta en común, dado que la siguiente actividad, centrada en las definiciones proporcionadas, favorece el debate sobre la definición formal del rectángulo.

Actividad 5. Análisis y selección de la definición de rectángulo óptima desde un punto de vista formal

Descripción

El profesorado en formación debe analizar en equipos la idoneidad de cuatro definiciones del rectángulo encontradas en libros de texto y seleccionar razonadamente la óptima desde un punto de vista riguroso matemático (formal):

1. Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.
2. Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.
3. Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.
4. Es un paralelogramo con un ángulo recto.

El profesorado trabaja primero en grupo; después se realiza una puesta en común y se discuten las propuestas.

Objetivos específicos

- ▶ Utilizar argumentos precisos y rigurosos para valorar la adecuación matemática de definiciones del rectángulo.

- ▶ Identificar las principales características de una buena definición en matemáticas.
- ▶ Identificar definiciones equivalentes del rectángulo.

Orientaciones didácticas

La definición 1 permite discutir la relación entre el cuadrado y el rectángulo y cuestionar hasta qué punto son figuras geométricas tan diferentes. El formador puede recurrir a la imagen de un marco formado por dos barras horizontales paralelas y dos barras verticales móviles que las conectan. Al desplazar las barras verticales, se obtienen rectángulos de diferentes proporciones. Se pregunta al profesorado si la figura sigue siendo un rectángulo a medida que las barras verticales se acercan; la respuesta siempre es afirmativa. Solo cuando la anchura del marco iguala su altura, el profesorado cambia de denominación y llama cuadrado a la figura resultante.

La definición 2 sirve para profundizar en la característica de «minimalidad» de una definición en matemáticas y discutir si la expresión «los lados opuestos tienen la misma longitud» excluye el cuadrado.

Las definiciones 3 y 4 pueden presentarse conjuntamente. Quien dirige la formación puede utilizar recursos como GeoGebra o geotiras, especialmente útiles en la definición 4 dada la dificultad del profesorado en formación para asumir que un ángulo recto en un paralelogramo implica que los otros tres también lo sean.

Actividad 6. Imagen y definición del concepto en el caso del rectángulo

Descripción

A partir de las aportaciones de Tall y Vinner (1981) sobre la imagen y la definición de un concepto, el profesorado debe responder a las siguientes preguntas:

- 6.1.** ¿Qué propiedades del rectángulo consideráis que se deberían destacar en EI?
- 6.2.** A la vista de los ejemplos propuestos en la figura 1.1: ¿el alumnado podría construir una imagen del concepto rica? ¿Hay representaciones redundantes? ¿Falta alguna? Justificad vuestra respuesta.
- 6.3.** Analizad la ficha de EI de la figura 1.2 y, si la consideráis incompleta, indicad qué representaciones añadiríais y por qué.

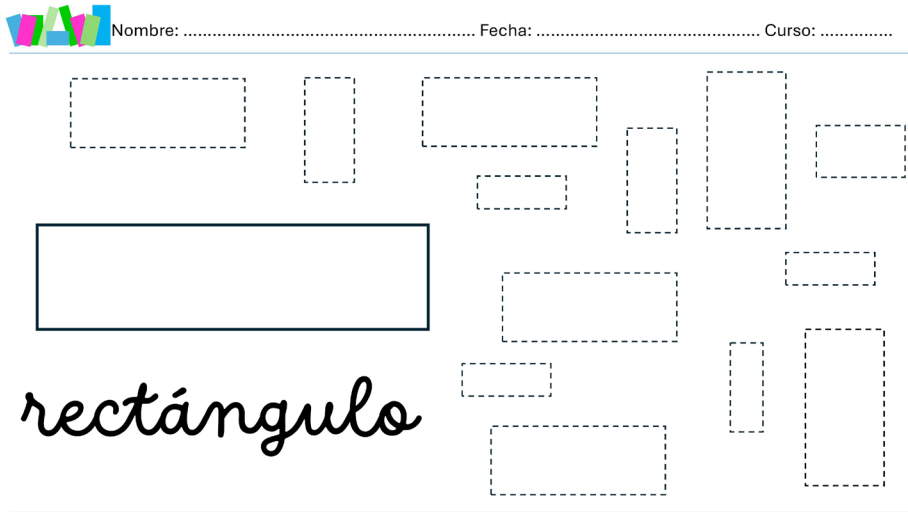


Figura 1.2. Ficha de El sobre el rectángulo, inspirada en <https://www.edufichas.com/matematicas/figuras-geometricas/>

Al igual que en actividades previas, el profesorado trabaja primero en grupo y después pone en común y discute sus respuestas.

Objetivos específicos

- ▶ Valorar qué propiedades relevantes del rectángulo puede comprender el alumnado de El.
- ▶ Disponer de argumentos para determinar si un conjunto de imágenes del rectángulo es suficientemente rico y variado —en ejemplos y contraejemplos— para que el alumnado construya el concepto.
- ▶ Comprender el papel de los ejemplos y los contraejemplos en la construcción de un concepto
- ▶ Ser capaz de analizar un diseño didáctico desde un enfoque didáctico matemático.
- ▶ Elaborar un banco de imágenes asociadas al rectángulo, rico en ejemplos y contraejemplos adaptados a El.
- ▶ Identificar las limitaciones que supone para la construcción del concepto abusar de ejemplos con valores estereotipados en las propiedades irrelevantes.

Orientaciones didácticas

Esta actividad aborda la definición del rectángulo desde la perspectiva de El. Se pretende que el futuro profesorado reflexione sobre qué propiedades del rectángulo-

lo puede comprender e intuir el alumnado de esta etapa. Por ejemplo, en Educación Infantil, no es posible hablar de conceptos como *polígono* o *paralelogramo*, pero el alumnado sí puede apreciar propiedades como *figura cerrada* o con *superficie*, propias del enfoque topológico, que es el primer enfoque geométrico con el que se accede a la comprensión del espacio (Vanegas, 2018). También resulta interesante introducir el concepto de *lado recto* y que los alumnos aprecien que la figura tiene cuatro vértices o esquinas. El formador puede preguntar al profesorado en formación qué otras propiedades consideran que podría intuir el alumnado y de qué modo.

La pregunta 6.2 pretende que el profesorado analice la figura 1.1 de la actividad 2 y valore si el conjunto de ejemplos y contraejemplos del concepto de rectángulo sería adecuado para trabajarlo en EI. En general, la ilustración es rica en ejemplos, pero no en contraejemplos. La identificación de propiedades propias de EI en el apartado 6.1 debería llevar al profesorado a pensar en contraejemplos: una figura abierta, una figura con solo contorno o un polígono con un número de lados distinto de cuatro para que, mediante la comparación, identifique el número de lados del rectángulo. Quien dirige la formación también debe promover la reflexión sobre la pertinencia de los contraejemplos formulados. Por ejemplo, en relación con el concepto de figura cerrada, se podrían plantear los contraejemplos de la figura 1.3, y hacer reflexionar al profesorado sobre su idoneidad con la pregunta: «¿Cuál de estas figuras geométricas sería más adecuada?». Aunque ambas son figuras abiertas, la de la izquierda puede invitar a argumentar que no es un rectángulo porque tiene tres lados.

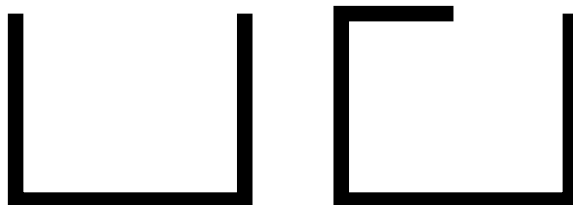


Figura 1.3. Contraejemplos del rectángulo: figuras no cerradas.

Respecto a la pregunta 6.3, se trata de que el profesorado compruebe que ya dispone de criterios profesionales para analizar propuestas didácticas y de que los utilice para valorarlas y completarlas. La ficha que se proporciona muestra un rectángulo en posición estándar, ya sea en vertical o en horizontal, con un lado de aproximadamente el doble de longitud que el contiguo.

Actividad 7. Características de las tareas para iniciar la práctica de definir en El

Descripción

El profesorado en formación debe leer y comprender los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998), reflexionar sobre la forma que adopta la definición en El y diseñar actividades para ayudar al alumnado a avanzar del nivel de visualización al de análisis. Deberá responder a las siguientes preguntas:

- 7.1. ¿Qué forma adopta una definición de un concepto matemático en El? Dicho de otro modo ¿cómo es una definición en esta etapa?
- 7.2. En el caso del rectángulo, ¿qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) considerando el nivel de desarrollo del alumnado y el contenido que se trabaja?
- 7.3. ¿Qué actividades se deberían proponer para que el alumnado pueda comenzar a evolucionar desde el primer nivel de «visualización» de Van Hiele al siguiente nivel de «análisis»?

Se deja un tiempo de trabajo en grupo para que el profesorado en formación reflexione y discuta, y, a continuación, se procede a la puesta en común.

Objetivos específicos

- ▶ Conocer los niveles de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele.
- ▶ Reflexionar sobre la forma que adopta una definición en El.
- ▶ Comprender que la identificación y la comparación son procedimientos matemáticos precursores de la definición y claves en esta etapa escolar.
- ▶ Reconocer las dos lógicas opuestas: la empleada en la construcción de una definición matemática formal y la empleada en El.
- ▶ Comprender que la finalidad de trabajar la definición en El es ayudar al alumnado a avanzar del primer al segundo nivel de Van Hiele.
- ▶ Valorar qué actividades relacionadas con la definición se pueden proponer en El para promover el avance del primer al segundo nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele.

Orientaciones didácticas

La pregunta 7.1 requiere conocer el modelo de Van Hiele sobre los niveles de razonamiento geométrico. Se le puede proporcionar la descripción de dicho modelo

presente en Muñoz-Catalán *et al.* (2013), preparada para la formación inicial de maestros. Quien dirige la formación debe incidir en lo que caracteriza y distingue a los dos primeros niveles, que son los propios de esta etapa escolar.

Quien dirige la formación debe promover la discusión sobre la caracterización de una definición en EI, proceso que se inicia con la identificación de las propiedades de las figuras geométricas. Posteriormente, debe incidir en la comparación de figuras geométricas como práctica matemática útil para que el alumnado identifique propiedades al analizar en qué se parecen y en qué se diferencian. La identificación y la comparación son prácticas matemáticas precursoras de la definición y propias del trabajo matemático sobre geometría en EI. El profesorado deberá aplicar este aprendizaje para el diseño de tareas para EI en la pregunta 7.3.

Lo que cabe esperar de una definición en EI es que sea un listado de propiedades. Es importante reparar en que la lógica que debe emplear el profesorado de esta etapa es opuesta a la que emplea un matemático, pues ha de desmenuzar el contenido, identificar sus propiedades básicas y precursoras y plantearse cuáles trabajar de manera explícita, y cuáles, de manera intuitiva.

En la pregunta 7.2 se debe particularizar en la definición del rectángulo, haciendo referencia a propiedades como ser figura cerrada, tener superficie o tener cuatro lados. Asimismo, se puede discutir cómo llevar al alumnado a intuir o experimentar otras propiedades, como el paralelismo o la amplitud de los ángulos.

Referencias

- Canals, M. A. (1997). La geometría en las primeras edades escolares. *Suma*, 25, 31-44.
- De Villiers, M. (2009). To teach definitions in Geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 248-255). University of Stellenbosch.
- Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 7-32. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1711>
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2/3), 27-46. <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutJai98.pdf>
- Leikin, R. y Zazkis, R. (2010). The content dependence of prospective teachers' knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 451-466. <https://doi.org/10.1080/00207391003605189>

- Muñoz-Catalán, M. C., Montes, M. A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Aguilar, Á. (2013). *La clasificación de figuras planas en primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Universidad de Huelva.
- Muñoz-Catalán, M. C., Joglar-Prieto, N., Ramírez, M. y Codes, M. (2022). El modelo MTSK desde la perspectiva del profesor de EI: foco en el dominio matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 235-250). Dykinson.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Vanegas, Y. (2018). Percepción, interpretación y representación del espacio. En M. C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de EI* (pp. 213-242). Paraninfo.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 1.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades								
			1	2	3	4	5	6	7		
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Conocer la definición de rectángulo.	X		X	X					
		Saber identificar ejemplos y contraejemplos del rectángulo.	X					X			
		Identificar exhaustivamente las propiedades del rectángulo.				X					
		Saber distinguir las propiedades relevantes, irrelevantes e incorrectas del concepto de rectángulo.				X		X			
		Saber identificar definiciones equivalentes del rectángulo.						X			
	Registros de representación	Conocer diferentes representaciones de rectángulo en registro verbal e icónico-gráfico y conversiones entre registros.	X	X							
	KPM	La práctica de definir	Conocer las características necesarias y suficientes para definir en matemáticas.	X		X	X				
			Conocer el papel que desempeñan los distintos tipos de propiedades en el proceso de construcción de una definición.				X				
			Conocer que la identificación de propiedades y la comparación entre figuras geométricas son prácticas precursoras de la construcción de una definición.								X
			Conocer el papel de los ejemplos y los contraejemplos en la construcción de un concepto.	X		X	X				

Tabla 1.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades						
			1	2	3	4	5	6	7
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Conocer los niveles de razonamiento de Van Hiele, especialmente los dos primeros.							X
		Teorías sobre aprendizaje	Conocer las limitaciones que supone para la construcción del concepto abusar de ejemplos con valores estereotipados en las propiedades irrelevantes.						X
		Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático	Conocer propiedades presentes en los ejemplos que actúan como distractores para la construcción del concepto de rectángulo en EI.				X		
			Conocer el papel de la imagen y la definición del concepto en el aprendizaje de los conceptos geométricos.						X
			Conocer cómo puede definir el rectángulo el alumnado de EI.						X
	KMT	Teorías de enseñanza de las matemáticas	Conocer las limitaciones que supone para la construcción del concepto abusar de propiedades irrelevantes en los ejemplos.					X	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Elaborar un banco de imágenes asociadas al rectángulo, rico en ejemplos y contraejemplos, adaptado a EI.						X
			Conocer que las actividades de comparación de figuras geométricas ayudan a identificar propiedades.						X
	KMLS	Nivel del desarrollo conceptual y procedimental esperado	Identificar los atributos del rectángulo apropiados para EI.						X
			Saber qué definición de rectángulo es apropiada en EI.						X

Hojas de trabajo

Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo

Antes de trabajar esta tarea, deberás leer el documento de Escudero *et al.* (2014), lo que te permitirá conocer los atributos que caracterizan una definición.

Tabla 1.3. Atributos de una definición matemática.

Atributos que debe cumplir una definición matemática (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014)	
Jerarquía (precisión)	Los términos usados deben ser básicos o estar definidos previamente.
No circularidad	En la definición de un concepto no se puede hacer uso del propio concepto. Asimismo, si para definir un concepto se hace uso de otro, la definición del segundo no puede basarse en la del primero.
Minimalidad	La definición no debe ser redundante: ninguna característica podrá deducirse del resto.
No ambigüedad	Debe quedar claro qué objetos pertenecen a una clase.
No contradictoria	Las características deben ser consistentes: no puede incluirse una y su opuesta.
Invariante	La definición debe mantenerse bajo cualquier cambio de representación.
Equivalencia	Si se pueden enunciar distintas definiciones de un mismo concepto, estas han de ser equivalentes.

ACTIVIDAD 1

Vamos a comenzar con la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. De manera individual, pensad en el rectángulo y dibujad la imagen o las imágenes que os vengan a la mente (podéis hacerlo en papel y digitalizarlo para incluirlo en la tabla 1.4). A continuación, elaborad en grupo una definición consensuada de «rectángulo» que tenga en cuenta las figuras geométricas propuestas por cada uno.

Tabla 1.4. Imágenes del rectángulo

Estudiante	Dibujo del rectángulo

Definición de rectángulo:

ACTIVIDAD 2

Observad la figura 1.1. ¿Todas las figuras podrían considerarse ejemplos de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla 1.5, refiriéndoos a cada una según el número asignado.

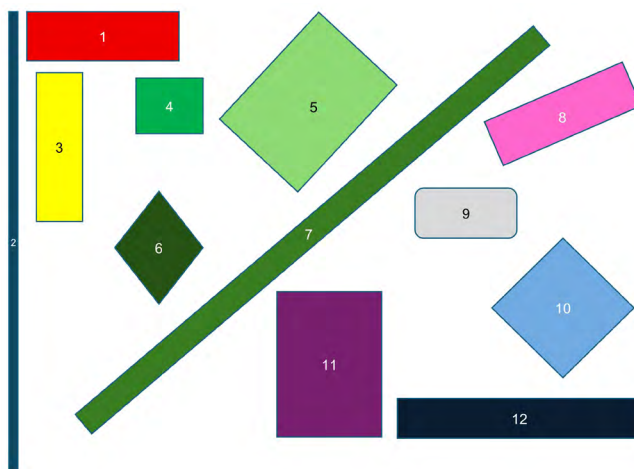


Figura 1.1. Ejemplos de figuras geométricas que podrían o no ser rectángulos.

Tabla 1.5. ¿Es o no un ejemplo de rectángulo?

	Sí es ejemplo de rectángulo	No es ejemplo de rectángulo	¿Por qué?
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

ACTIVIDAD 3

Elaborad un listado de las propiedades, características o atributos que identificáis en las figuras geométricas que habéis considerado rectángulos y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son. Recoged ambos en la tabla 1.6.

Tabla 1.6. Propiedades de las figuras geométricas.

Propiedades que aparecen en las figuras geométricas consideradas como ejemplo de rectángulo	Propiedades que aparecen en las figuras geométricas consideradas como ejemplo de NO rectángulo
---	--

ACTIVIDAD 4

Podemos identificar tres tipos de propiedades en un concepto:

Propiedades relevantes: son las propiedades que definen el concepto. Siempre están presentes en los ejemplos utilizados. Dentro de las relevantes, las *propiedades críticas* son las mínimas necesarias para construir una definición (véase la tabla 1.3). (Ej.: en el caso del triángulo, una propiedad relevante es tener tres lados).

Propiedades irrelevantes: son propiedades no necesarias del concepto, que pueden aparecer o no en los ejemplos utilizados para un determinado concepto. Conviene evitar que los ejemplos seleccionados conviertan estas propiedades en relevantes. (Ej.: en el caso del triángulo, una propiedad irrelevante sería uno de sus lados descansa sobre la horizontal).

Propiedades incorrectas: son propiedades que el concepto no posee. (Ej.: en el caso del triángulo, una propiedad incorrecta sería tener un ángulo cóncavo).

Ordenad las propiedades señaladas en la actividad 3 según esta clasificación en la tabla 1.7.

Tabla 1.7. Propiedades relevantes, irrelevantes e incorrectas del concepto de rectángulo.

	Propiedades	
Relevantes	Irrelevantes	Incorrectas

¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, a partir de las propiedades que habéis identificado como «relevantes» en la actividad anterior. Además, ¿cumple vuestra definición las propiedades de la tabla 1.3?

ACTIVIDAD 5

En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. ¿Cuál o cuáles son correctas, incorrectas o incompletas? Justificad vuestra respuesta también desde la perspectiva de las características de la tabla 1.3.

1. Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.
2. Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.
3. Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.
4. Es un paralelogramo con un ángulo recto.

ACTIVIDAD 6

Según Tall y Vinner (1981), la mayoría del profesorado tiene la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y de que las imágenes tienen un papel secundario. Para cuestionar esta creencia, los autores definen dos nociones clave e indican el papel que juega la imagen del concepto en relación con su definición:

Definición de un concepto: Se refiere a la definición formal matemática del concepto.

Imagen del concepto: Se refiere a cómo se refleja dicho concepto en la mente de la persona; es el producto de los procesos mentales de formación del concepto e incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumnado se encuentra con nuevos estímulos.

6.1 ¿Qué propiedades del rectángulo consideraréis que se deberían destacar en EI?

6.2 ¿Consideráis que el conjunto de figuras geométricas que aparece en la figura 1.1 (actividad 2) es suficiente para que el alumnado pueda construir una imagen rica del rectángulo y de sus propiedades? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

6.3 ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente (figura 1.2)? ¿Qué propiedades del rectángulo, ya sean relevante o irrelevantes, refuerza? Indicad qué figuras geométricas dibujaríais en clase para complementar esta propuesta.

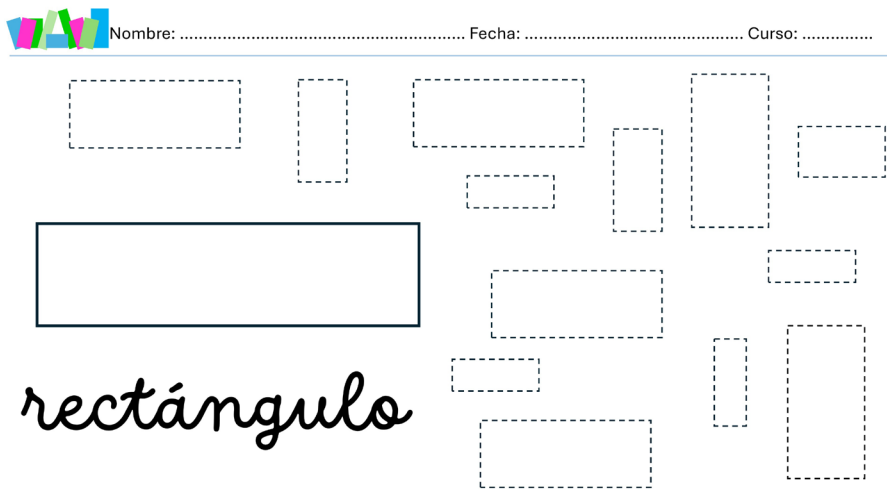


Figura 1.2. Ficha de El sobre el rectángulo, inspirada en <https://www.edufichas.com/matematicas/figuras-geometricas/>

ACTIVIDAD 7

Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por que el alumnado se inicie en el proceso de definir, en lugar de limitarse a identificar el rectángulo (u otros conceptos). Según Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998), solo las personas que logran alcanzar el cuarto nivel de *deducción formal* son capaces de construir una definición apropiada, pero es aceptable y deseable abordar el proceso de construcción de definición desde El.

Responded a las siguientes cuestiones:

- 7.1. ¿Qué forma adquiere una definición de un concepto matemático en EI? Dicho de otro modo ¿cómo es una definición en esta etapa?

- 7.2. Si lo particularizamos al caso del rectángulo, ¿qué sería aceptable teniendo en cuenta el nivel de desarrollo del alumnado y el contenido que se trabaja?

- 7.3 ¿Qué actividades se deberían utilizar para que el alumnado pueda comenzar a evolucionar desde el primer nivel de *visualización* de Van Hiele al siguiente nivel de *análisis*?

2. Introducción a la suma de fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de un modelo de áreas

Eric Flores-Medrano

<https://orcid.org/0000-0002-6134-729X>

Universidad Complutense de Madrid (España)

Dinazar Escudero-Ávila

<https://orcid.org/0000-0001-6380-9016>

Universidad Complutense de Madrid (España)

Miriam Méndez-Coca

<https://orcid.org/0000-0002-5053-1163>

Universidad Complutense de Madrid (España)

Nuria Joglar-Prieto

<https://orcid.org/0000-0002-5993-8082>

Universidad Complutense de Madrid (España)

Juan Miguel Belmonte

<https://orcid.org/0000-0002-1529-9776>

Universidad Complutense de Madrid (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria

Duración aproximada de la aplicación: 4 horas

Fundamentación

En la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria, el trabajo con operaciones sobre números racionales aparece en diversos currículos (Comunidad de Madrid, 2022). Distintos trabajos han documentado las dificultades que presenta el alumnado de Primaria y de otros niveles educativos

al trabajar con fracciones (Escobar *et al.*, 2016). Asimismo, se han señalado las dificultades del profesorado para enseñar estos contenidos. Por ejemplo, Valdemoros (2010) describe una serie de obstáculos que encuentra una profesora al trabajar las fracciones con su alumnado, derivados de la falta de sentido con la que ella misma aprendió este contenido —carencia que también detectaba en los libros que empleaba como apoyo para sus clases— y de la ausencia de contextos de medición en el trabajo con fracciones.

En la literatura se ha destacado la importancia de emplear representaciones variadas y adecuadas en la construcción de la comprensión de las fracciones (Lamon, 2001). Esta variedad de representaciones se ve favorecida cuando se trabaja, además, con distintos significados de la fracción (Mancera, 1992) y cuando estos elementos se conectan para dar sentido a las operaciones con fracciones que han de enseñarse en la Educación Primaria.

En esta tarea formativa nos centramos en el significado de la fracción como parte-todo, por su proximidad al trabajo con los números naturales y a la posibilidad de contextualizarlo mediante áreas de figuras geométricas. Este último aspecto del trabajo con áreas nos permite explorar con el profesorado en formación, aunque de manera menos profunda, el significado de área como medida.

Por otro lado, en esta tarea formativa coincidimos con Moreno y García (2009) en la importancia de que el profesorado en formación aprenda a usar materiales para la enseñanza de las matemáticas. Este uso implica manejarlos con destreza y ser capaz de analizar en profundidad sus características, potencialidades, posibles dificultades de manejo y limitaciones en determinadas situaciones, lo cual podría llevar, incluso, al rediseño o a la creación de nuevos materiales.

En esta tarea emplearemos la noción de modelo de áreas descrita por Parrish y Dominick (2022) en el que se utilizan rectángulos con las mismas dimensiones en sus lados, subdivididos en partes iguales en forma y medida, con la finalidad de representar fracciones con distintos denominadores. Estas divisiones permiten combinar las piezas de distintos rectángulos con la finalidad de calcular, a partir de la unidad definida, el área resultante de efectuar las distintas operaciones.

Objetivos generales

Se busca que el profesorado en formación:

1. Reconozca las características matemáticas y didácticas del modelo de áreas como recurso didáctico físico (manipulativo) para introducir la suma de fracciones en Primaria.

2. Analice y discuta diseños de actividades secuenciadas para introducir el trabajo con las operaciones de fracciones en la enseñanza básica.
3. Establezca la relación del trabajo con el modelo de áreas —y otros recursos didácticos que pueden emplearse para trabajar las operaciones con fracciones— y los significados propios del concepto de fracción.
4. Reflexione sobre el papel de los algoritmos en matemáticas, analice y compare diferentes algoritmos, y diseñe posibles alternativas para dar significado a las operaciones con fracciones.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar la tarea, el profesorado en formación debería tener conocimientos sobre:

- ▶ Distintos significados asociados al concepto de fracción.
- ▶ Operaciones básicas de comparación, suma, resta, multiplicación y división con fracciones, al menos mediante algoritmos tradicionales.
- ▶ Aspectos curriculares relativos al trabajo con fracciones en el aula de Educación Primaria en su contexto.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

La tarea puede adquirir mayor valor formativo si se aplica después de otras tareas dirigidas a sensibilizar al profesorado en formación acerca de la importancia de la construcción genuina de los conocimientos matemáticos por parte del alumnado. Resulta interesante que se reflexione previamente sobre la influencia del profesorado en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y sobre el significado de su aprendizaje. Asimismo, esta tarea debe entenderse como parte de una colección de tareas que permitan explorar otros significados de la fracción mediante, por ejemplo, modelos lineales (significado de medida) o de conjuntos (significado de operador), por citar algunos (Parrish y Dominick, 2022), a la vez que contribuyan a desarrollar competencias profesionales diversas.

A continuación, se muestran las actividades que componen la tarea formativa y se proporcionan algunas orientaciones didácticas que pueden servir a quien dirige la formación para gestionar la tarea en el aula; estas orientaciones no son restrictivas, sino ilustrativas.

De manera general se propone trabajar toda la tarea en pequeños equipos como primera aproximación para, a continuación, realizar puestas en común que permitan consensuar el contenido de aprendizaje de cada actividad.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Hojas de papel A4 de seis colores distintos.
- ▶ Tijeras o cúter.
- ▶ Cartulinas, cartoncillo o goma EVA de seis colores distintos.
- ▶ Rotuladores.
- ▶ Regla.
- ▶ Compás.
- ▶ Transportador de ángulos.

Actividad 1. Elección de la forma del material: elaborando un prototipo

Descripción

Esta actividad se realiza en grupos de cuatro a seis personas y se parte de la indicación: «Diseñad el prototipo de un material manipulativo que resulte útil para trabajar la equivalencia de fracciones mediante la comparación de áreas. Para ello, cada integrante del grupo elegirá una figura geométrica diferente y seis denominadores con los que trabajar la equivalencia de fracciones». Quien dirige la formación puede brindar orientaciones en caso de que el profesorado en formación no recuerde o no conozca el significado de fracciones equivalentes o de material manipulativo. A continuación, reparte al profesorado en formación folios de distintos colores e indica que cada color deberá corresponderse con un denominador distinto.

Dos cuestiones en las que se debe dar autonomía al profesorado en formación son, por un lado, la elección de los seis denominadores (que debe hacerse de manera conjunta por los integrantes de un grupo, pero no tiene por qué coincidir con lo propuesto por otros grupos), y, por otro, la elección de las figuras (que se hará de manera individual, procurando que no difieran solo en sus dimensiones, sino que sean figuras de distinto tipo). Resulta útil, sin embargo, que en un grupo haya un cuadrado y un rectángulo no cuadrado, o un cuadrado y un rombo no cuadrado. Quien dirige la formación deberá limitar sus intervenciones y enfatizar que el objetivo del material es trabajar la equivalencia de fracciones.

Una vez que en los grupos haya propuestas de figuras, de denominadores y de divisiones de estas de acuerdo con los denominadores, es importante que quien dirige la formación propicie discusiones entre los integrantes sobre la idoneidad de las elecciones y la corrección del procedimiento. Algunas preguntas que se podrían plantear son: «¿Realmente se está dividiendo en partes iguales (congruentes)? ¿Entre qué fracciones de las elegidas podrían establecerse equivalencias? ¿Cómo se trabajaría la equivalencia de fracciones?».

Es importante que no se asiente la concepción de que la única forma de obtener partes iguales de una figura es lograr que dichas partes puedan solaparse con precisión (por ejemplo, discutiendo el caso de un rectángulo no cuadrado que se divide con diagonales), pero que sí es la forma más útil para el objetivo que se persigue. Asimismo, este es un momento propicio para verificar si, una vez elegida una figura, esta se ha dibujado con las mismas dimensiones en los seis colores distintos. Si quien dirige la formación considera que alguna de las cuestiones planteadas no se ha atendido con la importancia que requiere, puede pedir que se recorten las figuras para experimentar con estas (por ejemplo, si un hexágono se divide en ocho partes con la misma técnica que se emplea para el círculo, se puede pedir al profesorado en formación que recorte esa figura geométrica y sus partes y compruebe la coincidencia entre ellas; o si se dividió un cuadrado por la mitad con un segmento vertical y en cuatro partes con sus dos diagonales, se puede pedir que lo recorte para explorar la equivalencia entre un medio y dos cuartos).

Una vez que cada grupo ha terminado su trabajo, quien dirige la formación debe coordinar una reflexión plenaria a partir de las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo seleccionasteis los denominadores?
2. ¿Hubo figuras en las que no se pudieran hacer todas las divisiones en partes iguales?
3. ¿Alguna de las figuras elegidas podría trabajarse independientemente de los denominadores seleccionados?

En este punto se puede destacar la muy probable coincidencia en el trabajo con círculos, rectángulos y cuadrados, ya que estos se pueden dividir según cualquier denominador. Puede ocurrir que se hayan elegido otras figuras igualmente útiles, como un semicírculo, por poner un ejemplo. En cualquier caso, deberá discutirse qué características hacen que estas figuras sean útiles para cualquier subdivisión.

Objetivos específicos

- ▶ Comprender el concepto de fracción como la relación entre un todo y una parte de este, así como su representación mediante el área de una figura.
- ▶ Identificar aspectos relevantes en la elección o el diseño de materiales didácticos.

Orientaciones didácticas

Se sugiere que quien dirige la formación señale los aspectos importantes del material que se analiza, y oriente las reflexiones de los distintos equipos para alcanzar los objetivos planteados y desarrollar los conocimientos especializados propuestos de manera constructiva a través de la reflexión colectiva.

Actividad 2. Diseño del material didáctico

Descripción

La consigna de la actividad es: «Usando cartulinas de colores, diseñad un material didáctico que permita trabajar la equivalencia de fracciones en Primaria usando el modelo de áreas. La única condición para diseñar el material es que se usen únicamente seis colores distintos de cartulinas, cartoncillo o goma EVA (según lo decida el equipo) y que cada uno de los colores se emplee para representar un denominador distinto».

Para diseñar el material se propone al equipo que utilice el rectángulo como base, ya que, a diferencia del cuadrado o el círculo, exige una mayor reflexión sobre el modo en que debe dividirse.

En este momento puede debatirse sobre qué denominadores permiten una mayor interacción entre los materiales de distintos colores. La elección de los denominadores debe ir acompañada de una reflexión sobre la potencialidad del material y el concepto de divisor común. Las configuraciones más habituales para los denominadores que cabe esperar por parte del profesorado en formación son: 2, 3, 4, 5, 6, 7 (u 8 si advierten que el 7 es difícil de dividir), y 2, 4, 6, 8, 10, 12. El debate grupal debería llevar a la conclusión de que los denominadores son tanto mejores cuanto más puedan relacionarse por medio de divisores comunes. Por ese motivo, conviene alcanzar el consenso de usar los denominadores 2, 3, 4, 6, 8 y 12. Si se opta por otros denominadores, se recomienda aprovechar los momentos en que el material pierda potencialidad para reorientar el análisis hacia la elección óptima.

Para realizar las divisiones en partes iguales, el profesorado en formación debe analizar si es posible dividir una figura con líneas verticales, otra con horizontales, una tercera con una combinación de ambas o, incluso, con otras configuraciones en las que se obtenga la misma superficie y distinta forma, en caso de que esta cuestión no haya quedado resuelta en la actividad 1. Quien dirige la formación debe promover también una discusión sobre las dimensiones de los rectángulos. Por ejemplo, supongamos que se decide emplear rectángulos cuya base mida el doble que la altura. Si dividimos uno en doce partes con un segmento horizontal y cinco verticales y otro en cuatro partes usando solo segmentos verticales, las

piezas resultantes encajan visualmente, lo que podría generar una falsa imagen de equivalencia. En tal caso, la fracción $\frac{1}{4}$ quedaría representada por un rectángulo de $\frac{1}{4}$ de la base por la altura, equivalente a la mitad de la base. Este rectángulo podría superponerse sobre la división en doce partes mediante una rotación de 90° y encajaría perfectamente. En cambio, si la proporción entre los lados no es de dos a uno, sino cualquier otra (excluido el cuadrado), esta coincidencia no se produce y la falsa imagen de equivalencia desaparece.

Una vez discutidos estos aspectos, se pide materializar las ideas. El material consta de cuatro rectángulos de cada color, cuyas dimensiones serán siempre las mismas. Como se ha dicho antes, cada color de cartulina se corresponderá con un denominador, y cada una de las cuatro figuras se dividirá en función del denominador que le corresponda, siguiendo los acuerdos alcanzados en el debate. En cada cartulina, las cuatro figuras se recortarán por su contorno; tres de ellas, además, se recortarán por las líneas divisorias, mientras que la cuarta figura se rotulará. Así, por ejemplo, en el caso de la cartulina elegida para trabajar el denominador 3, tendremos un rectángulo rotulado con dos segmentos y nueve rectángulos equivalentes a $\frac{1}{3}$ del rectángulo rotulado. Todas estas piezas —tanto el rectángulo rotulado, como los nueve rectángulos de tamaño $\frac{1}{3}$ — serán del mismo color. El mismo procedimiento se aplica a las demás cartulinas (véase la figura 2.1).



Figura 2.1. Ejemplo de unidades marcadas como plantilla y piezas recortadas.

Objetivos específicos

- ▶ Reflexionar sobre las características matemáticas y didácticas que debe tener un material manipulativo físico que sirva para trabajar la equivalencia de fracciones.

- ▶ Reflexionar sobre la pertinencia, la potencialidad y las limitaciones del material tanto desde el punto de vista didáctico como matemático.

Orientaciones didácticas

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos tanto durante la reflexión sobre el material como en su construcción. Es importante favorecer la puesta en común en gran grupo para que surjan distintas reflexiones y puedan compararse y contrastarse. El diseño de material puede dejarse como trabajo fuera del aula.

La actividad consta de dos hojas de trabajo: la primera debe entregarse antes de la puesta en común en gran grupo; la segunda, después.

En esta actividad, quien dirige la formación debe participar de forma más activa para cuestionar al profesorado en formación sobre la pertinencia de sus elecciones de figuras y denominadores, así como sobre las características matemáticas que deben guiar estas reflexiones. No obstante, conviene continuar procurando que sea el profesorado en formación quien construya los conocimientos a partir de la observación, la reflexión y la comparación de sus materiales.

Actividad 3. Suma de fracciones con modelo de áreas

Descripción

Se pide al profesorado en formación que trabaje la suma de dos fracciones a partir de los ejercicios propuestos por quien dirige la formación, con libertad en la forma de emplear el material. La progresión de los ejercicios debe ser la siguiente:

- 3.1.** Sumas de fracciones con el mismo denominador. Se sugiere recorrer los seis denominadores.
- 3.2.** Sumas de fracciones con distinto denominador, siendo uno múltiplo del otro. Se sugiere explorar las distintas combinaciones que permite el material: por ejemplo, sumas de medios y cuartos, cuartos y doceavos, tercios y sextos, etc.
- 3.3.** Sumas de fracciones con distinto denominador, sin que uno sea múltiplo del otro. Se sugiere comenzar con fracciones cuyo denominador común sea el producto de sus denominadores (por ejemplo, medios y tercios, tercios y cuartos), y, por último, explorar el caso de cuartos y sextos.

Se pide a los equipos que compartan en gran grupo algunas de las formas en que han utilizado los materiales para resolver los ejercicios, de manera que quien dirige la formación pueda orientar la reflexión sobre los siguientes aspectos:

- ▶ La utilidad o pertinencia del material para la actividad propuesta: la mayoría suele valorar el material como adecuado para trabajar la suma y le atribuye un carácter lúdico y manipulativo. Sin embargo, puede ocurrir que no se analice la pertinencia del material para lograr los aprendizajes esperados.
- ▶ Los procedimientos empleados, sobre todo en el caso de la suma de fracciones con distinto denominador: es habitual que la mayoría del profesorado en formación emplee el mínimo común múltiplo para resolver la suma y solo represente el resultado en el material, en lugar del proceso o la estrategia para sumar. Por ello es importante reflexionar sobre la función didáctica y matemática —y no solo lúdica o motivacional— de los materiales manipulativos. Más adelante se abordarán los diferentes procedimientos y sus potencialidades y limitaciones.

Objetivos específicos

- ▶ Analizar el funcionamiento del material diseñado en la actividad 2 para trabajar la suma de fracciones.
- ▶ Valorar el material como medio para resolver la operación, y no solo como una forma de representar otros algoritmos de resolución o el resultado de la suma.

Orientaciones didácticas

Cuando quien dirige la formación propicie la reflexión sobre las diferencias entre usar el material para representar o para resolver las operaciones, podrá retomar la importancia del uso y el abuso de los materiales didácticos.

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos y favorecer la puesta en común en gran grupo para comparar las distintas reflexiones y contrastar las respuestas.

En esta actividad, quien dirige la formación adopta un papel de acompañamiento: se encarga de proponer los ejercicios y de observar las formas en que los equipos utilizan el material.

Actividad 4. Restringiendo el uso de algoritmos aritméticos

Descripción

Se pide al profesorado en formación que resuelva nuevos ejercicios de sumas de fracciones con la misma progresión que en la actividad anterior (propuestos por quien dirige la formación siguiendo las recomendaciones de la actividad 3). Sin embargo, se le indica que no utilice el mínimo común múltiplo y se plantea la pregunta:

«¿Cómo resolvería las siguientes sumas de fracciones el alumnado que no conoce o no recuerda el algoritmo habitual para sumar fracciones y que cuenta con el material que habéis diseñado?».

Cuando un denominador es múltiplo del otro, es habitual que la mayoría del profesorado en formación realice conversiones a fracciones equivalentes. Cuando no son múltiplos, normalmente la mayoría afirma que sin el mínimo común múltiplo no es posible realizar la suma, sobre todo para el ejercicio que involucra fracciones con denominadores 4 y 6.

En este punto suelen surgir opiniones que señalan que el material puede resultar complicado o confuso para el profesorado en formación, dado que puede usarse de formas diferentes según los sumandos concretos. Además, parte del profesorado en formación considera que es más fácil y rápido enseñar el algoritmo habitual como una lista ordenada de pasos válida para todos los casos.

En esta actividad, se sugiere que quien dirige la formación limite su intervención a reforzar las instrucciones al principio y a detectar si, de manera explícita o implícita, se está recurriendo al uso del mínimo común múltiplo como mecanismo no transparente para resolver el ejercicio, mientras que el material solo se emplea para representar el resultado. Decimos «no transparente» porque el profesorado en formación no siempre es capaz de justificar con rigor por qué funciona el algoritmo. Esta actividad sirve como momento de ruptura con el uso del algoritmo tradicional.

Posteriormente, quien dirige la formación debe orientar el consenso, ya sea mediante preguntas o con una lluvia de ideas, hacia los siguientes puntos sobre el uso del material:

- ▶ La pregunta que guía la manipulación del material para resolver la suma de fracciones es: «Si cada figura completa es una unidad, ¿qué área ocupan en total las piezas que representan los sumandos?».
- 4. Solo se pueden usar sumandos con denominadores que puedan representarse con las piezas generadas.
- 5. Las piezas rotuladas sirven como base para colocar las piezas recortadas que representan los sumandos. Es probable que surja la necesidad de recortar y rotular otra pieza de cada color para poder obtener resultados mayores que la unidad. Otra opción es que, una vez completada la unidad, las piezas sobrantes se coloquen de la misma forma fuera de la de la base rotulada, reutilizando esta para seguir juntando piezas.

Una base está bien elegida si el resultado se ajusta a las divisiones rotuladas, ya que esto permitirá determinar con precisión la cantidad de superficie ocupa la suma. Es recomendable que se exploren ejercicios en los que dicha base podría no corresponderse con el cálculo habitual del denominador común (por ejemplo, $1/4 + 2/8$ admitiría trabajar en la base rotulada en medios, en cuartos o en octavos).

También conviene destacar cómo esta reflexión sobre la elección de la base permite resolver todos los ejercicios, incluido el de cuartos y sextos, sin necesidad de recurrir a la noción de mínimo común múltiplo como conocimiento previo.

Objetivos específicos

- ▶ Reflexionar sobre el uso de procedimientos y materiales alternativos al algoritmo tradicional y al mínimo común múltiplo, y valorar su potencialidad para propiciar el aprendizaje de la suma de fracciones.

Orientaciones didácticas

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos, con puesta en común en gran grupo para comparar las distintas reflexiones y contrastar las respuestas. De nuevo, quien dirige la formación se centra en proponer los ejercicios y en velar por que los equipos cumplan la restricción de no usar el mínimo común múltiplo.

Actividad 5. Hipótesis sobre el comportamiento matemático del alumnado de Primaria

Descripción

Una vez que el profesorado en formación ha llegado a acuerdos sobre cómo funciona el material para resolver sumas de fracciones, se le propone que reflexione sobre la forma en la que el alumnado de Primaria se enfrentaría a la misma progresión que ha explorado (mismo denominador; denominadores distintos, pero uno múltiplo del otro; y denominadores diferentes sin uno sea múltiplo del otro). Para guiar esta reflexión pueden plantearse las siguientes cuestiones:

- 5.1** ¿Cómo procedería el alumnado de Primaria al trabajar cada ejercicio con los materiales facilitados?
- 5.2** ¿De qué conocimientos se valdría en sus respuestas?
- 5.3** ¿Qué ejercicios resolvería con facilidad y qué dificultades encontraría?
- 5.4** ¿Qué conjeturas construiría (válidas o no) sobre los procedimientos para sumar fracciones?

Trabajar con estas cuestiones permitirá a quien dirige la formación reconocer las concepciones del profesorado en formación y, si es necesario, retomar reflexiones o conclusiones anteriores.

Objetivos específicos

- ▶ Reflexionar sobre las posibles formas en que el alumnado podría interactuar con la suma de fracciones al trabajar con estos materiales, así como sobre otras cuestiones didácticas y matemáticas que podrían surgir.

Orientaciones didácticas

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos, con puesta en común en gran grupo para comparar las distintas reflexiones sobre los procedimientos y sus formas de representación, y contrastar las respuestas.

Se espera que quien dirige la formación dinamice la sesión y ayude a sintetizar las ideas del debate, proponiendo ejemplos de procedimientos que permitan destacar aspectos importantes para la elaboración de la hipótesis de progresión del alumnado.

Actividad 6. Cierre y reflexión final

Descripción:

Se pide al profesorado en formación que debata sobre los siguientes aspectos:

- ▶ ¿Cuál es el papel de los recursos materiales en la enseñanza de las matemáticas? (Alcances, intenciones y limitaciones).
- ▶ ¿Qué repercusiones tiene usar los materiales manipulativos sin reflexionar sobre el diseño de la tarea, y viceversa?
- ▶ ¿Cuál es el papel de los algoritmos en la clase de matemáticas? (*A priori* frente a *a posteriori*; el momento del abandono de los recursos materiales).
- ▶ ¿Cuál es el aporte didáctico y matemático del trabajo con este tipo de materiales en cuanto a la comprensión del concepto de fracción?
- ▶ ¿Cuáles son las limitaciones de centrar la atención en la enseñanza de los algoritmos tradicionales como única forma de abordar las operaciones de fracciones?

En actividades previas se planteó el trabajo con el modelo de conjuntos (operador). Así, quien dirige la formación tiene en este momento la posibilidad de recurrir a ejemplos o actividades realizadas anteriormente, asociadas a otros significados, que le permitan poner de relieve las diferencias entre todos ellos y las necesidades específicas que demanda la comprensión de cada uno.

Objetivos específicos

- ▶ Reflexionar sobre la importancia de realizar análisis amplios y profundos del uso de materiales didácticos en el aula, sus alcances y sus limitaciones.

Orientaciones didácticas

En esta actividad se sugiere propiciar la discusión en gran grupo, de manera que se alcancen conclusiones generales que luego los equipos puedan plasmar en las hojas de trabajo, para que quien guía la formación tenga registro de lo que cada equipo ha concluido.

En este momento, quien dirige la formación puede aprovechar para evaluar si la tarea ha logrado desarrollar en el profesorado en formación la capacidad de valorar la potencialidad didáctica y matemática del material y de la tarea en sí misma. Si lo considera pertinente, puede mostrarle las tablas de conocimientos y objetivos que se presentan a lo largo de la actividad, de modo que el profesorado en formación reconozca la variedad de conocimientos y habilidades que ha desarrollado durante la tarea.

Referencias

- Comunidad de Madrid (2022). Decreto 61/2022, de 13 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Primaria. Consejería de Presidencia.
- Escobar, D., Fuentes, L., Arcia, M. y Amaya, T. (2016). ¿Cuáles son las causas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones problemas que involucran fracciones? En E. Mariscal (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 217-224). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. En A. Cuoco y F. Curcio (eds.), *The role of representations in school mathematics—2001 yearbook* (pp. 146-165). NCTM.
- Mancera, E. (1992). *Significados y significantes de la fracción*. *Educación Matemática*, 4(2), 30-54.
- Moreno, C. y García, M. (2009). La epistemología matemática y los enfoques del aprendizaje en la movilidad del pensamiento instruccional del profesor. *Investigación y Postgrado*, 24(1), 218-240
- Parrish, S. D., y Dominick, A. (2022). *Number Talks: fractions, decimals and percentages*. Heinemann.
- Valdemoros, M. E. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de fracciones en la enseñanza de fracciones. *Relime*, 13(4-II), 423-440.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 2.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Introducción a la suma con fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de modelo de áreas».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividad						
			1	2	3	4	5	6	
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Dos figuras representan la misma fracción de una unidad si tienen la misma cantidad de superficie, independientemente de su forma.	X	X					
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Uno de los significados de la fracción es denominado parte-todo, en el que se entiende la fracción como una parte de la unidad.	X					
		Conocer la función del numerador y del denominador en el significado parte-todo. Denominador (cantidad de equiparticiones). Numerador (cantidad de partes que se consideran).	X						
		Fenomenología y aplicaciones	El área es un contexto para trabajar las fracciones.	X					
		Existen diferentes significados asociados a la fracción.					X		
		Procedimientos	Los denominadores son tanto mejores cuanto más puedan relacionarse por medio de divisores comunes. Por ese motivo, conviene usar los denominadores 2, 3, 4, 6, 8 y 12.	X	X				
Registros de representación	Distintos registros de representación asociados al concepto de fracción y conversiones entre ellos (tránsito entre registro icónico-gráfico y registro simbólico numérico en ambos sentidos, p. ej.).	X	X						

Tabla 2.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Introducción a la suma con fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de modelo de áreas».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades						
			1	2	3	4	5	6	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Dificultades del alumnado de Primaria para realizar sumas de fracciones manipulativamente.			X				
		Fortalezas y debilidades	Posibles dificultades y concepciones erróneas en el aprendizaje que surgen al favorecer de manera exclusiva el significado parte-todo de las fracciones.					X	
		Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático	Las posibles formas de interacción del alumnado de Primaria con este tipo de material para trabajar la suma de fracciones.					X	
	KMT	Recursos didácticos	Las características de un material manipulativo determinan su funcionamiento y sus restricciones a la hora de trabajar la equivalencia de fracciones.		X	X			
			El modelo de áreas es un recurso didáctico que permite trabajar la idea de fracciones equivalentes.				X		
			La forma de las figuras consideradas para el diseño del material, el color de las piezas, el número de partes y la forma en la que se divide la unidad son características que influyen en el potencial didáctico y matemático del material.				X		
			Las dificultades o errores que podría generar la forma de la unidad en los materiales (obstáculos didácticos).				X		
			El material diseñado es útil para trabajar la suma de fracciones utilizando el modelo de áreas, basándose en la equivalencia de las fracciones.				X		
			El material diseñado es útil para reflexionar sobre las diferencias entre representar un resultado y realizar un procedimiento con este tipo de recursos.					X	
	KMT	Recursos didácticos	La manipulación libre del material permite la construcción de conjeturas matemáticas.					X	
			Relaciones entre el uso de materiales manipulativos y el diseño de tareas a partir del análisis de las características didácticas y matemáticas del contenido que se va a trabajar.					X	

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades						
			1	2	3	4	5	6	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Progresión en la complejidad como medio de construcción de algoritmos mediante la prueba y la refutación de conjeturas.			X			
			Progresión de una secuencia didáctica para el desarrollo de un conocimiento y procedimiento específicos.				X		
			Papel del significado parte-todo de la fracción en la enseñanza de las fracciones y el tipo de ejercicios y problemas que se pueden abordar con este.					X	
			Importancia de facilitar distintos registros de representación, situarlos en paralelo y compararlos, discutiendo sobre similitudes y diferencias para construir la idea de fracción de forma más profunda.						X
			Importancia de fomentar el uso de diferentes procedimientos para realizar una suma de fracciones, facilitando la comparación entre ellos y la discusión sobre el potencial y las limitaciones de cada uno.						X
			Papel de la resolución de problemas en contexto para que emerjan los diferentes usos de las fracciones y se busquen distintos procedimientos para operar con ellas como estrategia de enseñanza.						X

Hojas de trabajo

Introducción a la suma con fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de modelo de áreas

ACTIVIDAD 1. Elección de la forma del material: elaborando un prototipo

Diseñad el prototipo de un material manipulativo que resulte útil para trabajar la equivalencia de fracciones mediante la comparación de áreas. Para ello, cada integrante del grupo elegirá una figura diferente y seis denominadores con los que trabajar la equivalencia de fracciones.

Una vez seleccionada una figura y diseñado el prototipo de material, responded como equipo a las siguientes preguntas:

- 1.1 ¿Cómo seleccionasteis los denominadores?

- 1.2. ¿Hubo figuras en las que no se pudieran hacer todas las divisiones en partes iguales que marcan los denominadores seleccionados?

- 1.3. ¿Alguna de las figuras elegidas podría trabajarse independientemente de los denominadores seleccionados?

ACTIVIDAD 2. Diseño del material didáctico

Usando cartulinas de colores, planead el diseño de un material didáctico que permita trabajar la equivalencia de fracciones en Primaria mediante el modelo de áreas. La única condición para diseñar el material es que se usen únicamente seis colores distintos de cartulinas, cartoncillo o goma EVA (según lo decida el equipo) y que cada uno de los colores se emplee para representar un denominador distinto.

Una vez que hayáis terminado con vuestro plan de diseño, responded a las siguientes preguntas en equipo:

2.1 ¿Qué figuras seleccionasteis para representar la unidad con la cartulina? ¿Por qué?

2.2 ¿Sería posible trabajar con otras figuras? ¿Cuáles?

2.3 ¿Qué dificultades habéis tenido, como equipo, al diseñar el material?

A partir de la discusión grupal que ha moderado vuestro profesor o profesora, responded a las siguientes preguntas:

2.4 ¿Consideráis ahora pertinente trabajar con otras figuras distintas a las que seleccionasteis al principio?

2.5 ¿Es necesario que todas las figuras tengan las mismas dimensiones?

2.6 ¿Cuáles son las divisiones óptimas (denominadores) para diseñar el material?
¿Por qué?

2.7 ¿Cómo influye la selección de las dimensiones de las figuras del material en el uso de este?

2.8 ¿Qué posibles obstáculos o dificultades puede encontrar el alumnado de Primaria al trabajar con este material?

2.9 ¿La puesta en común ha hecho que modifiquéis el plan de diseño? ¿Cómo y por qué?

ACTIVIDAD 3. Suma de fracciones con modelo de áreas

Considerando el material que habéis diseñado, resolved los siguientes ejercicios de suma de dos fracciones. Sugerimos que cada miembro del equipo realice al menos una de las operaciones propuestas para discutir posteriormente el proceso de resolución con el resto del equipo:

3.1 ¿Qué estrategias aplicaríais para resolver los siguientes ejercicios?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \quad \frac{2}{12} + \frac{5}{12}$$

3.2 ¿Qué estrategias aplicaríais para resolver este segundo bloque de ejercicios?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

3.3 ¿Qué estrategias aplicaríais para resolver este tercer bloque de ejercicios?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

Tras la discusión plenaria sobre los procesos que habéis seguido para resolver las operaciones, responded en equipo a las siguientes cuestiones:

3.4 ¿Os ha resultado útil o pertinente el material para resolver los ejercicios? ¿Por qué?

3.5 ¿Los procesos y estrategias que habéis utilizado para resolver los ejercicios han sido adecuados? ¿Por qué?

3.6 ¿Qué dificultades podría tener el alumnado de Primaria al trabajar esta actividad?

ACTIVIDAD 4. Restringiendo el uso de algoritmos aritméticos

¿Cómo creéis que el alumnado de Primaria resolvería los ejercicios propuestos en la actividad 3 si no conoce o no recuerda el algoritmo habitual para sumar fracciones (y, por tanto, no conoce el mínimo común múltiplo) y cuenta con el material que habéis diseñado?

ACTIVIDAD 5. Hipótesis sobre el comportamiento matemático del alumnado de primaria

Una vez analizada la progresión de los ejercicios de las actividades 3 y 4 para la suma de fracciones, formulad como equipo vuestras hipótesis sobre las siguientes cuestiones:

5.1 ¿Cómo procedería el alumnado de Primaria al trabajar cada ejercicio con los materiales facilitados?

5.2 ¿De qué conocimientos se valdría en sus respuestas?

5.3 ¿Qué ejercicios resolvería con facilidad y qué dificultades encontraría?

5.4 ¿Qué conjeturas construiría (válidas o no) sobre los procedimientos para sumar fracciones?

ACTIVIDAD 6. Cierre y reflexión final

A partir del debate grupal, elaborad como equipo una conclusión general sobre lo que consideraréis que habéis aprendido en esta tarea formativa, especialmente en relación con el concepto de fracción y las limitaciones de centrar la enseñanza en los algoritmos tradicionales.

3. Interpretación parte-todo de las fracciones

Eugenio Lizarde Flores

<http://orcid.org/0000-0001-8387-5651>

Escuela Normal Rural Gral. Matías Ramos Santos (México)

Leticia Sosa Guerrero

<https://orcid.org/0000-0002-4905-6684>

Universidad Autónoma de Zacatecas (México)

Nielka Rojas

<https://orcid.org/0000-0002-3548-635X>

Universidad Católica del Norte (Chile)

Ana María Reyes Camacho

<https://orcid.org/0000-0003-0990-9520>

Escuela Normal Rural Gral. Matías Ramos Santos (México)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria

Duración aproximada de la aplicación: 2 horas

Fundamentación

Esta tarea busca ampliar la reflexión del profesorado en formación sobre los significados de la fracción: parte-todo y operador. A partir de una situación en contexto personal/social (OECD, 2019) de reparto equitativo, se pretende que el profesorado en formación establezca fracciones de un terreno y las asocie con su representación numérica. Además, se busca que conciba el número racional como una operación multiplicativa sobre

una cantidad (todo o unidad), lo cual representa una división en partes según la cantidad que indica el denominador de la fracción operador, y una multiplicación por las partes que indica el numerador. La tarea implica movilizar contenidos de perímetro y área, así como determinar la forma que debe tener el terreno para cumplir las condiciones. Cabe señalar que la tarea fue discutida por grupos de profesorado en formación y profesorado en servicio de México para diferentes niveles educativos (Primaria, Secundaria, Bachillerato y Educación Superior) y distintos contextos académicos. Esto permitió enriquecer el análisis de los dominios de conocimiento producto de la variedad de respuestas obtenidas, y es ahí justo donde radica su potencial: favorecer la diversidad de procedimientos en atención a los resolutores.

Las fracciones son vistas a menudo como un tema que presenta dificultades en su enseñanza y aprendizaje (Figueras, 1988). Ante esta realidad, resulta fundamental diseñar tareas que contribuyan a que los estudiantes no solo revisiten el concepto, sino que lo hagan en un contexto menos trivializado (alejado del típico reparto de pasteles o chocolates). Por consiguiente, proponemos una situación inicial que va más allá de los repartos del tipo .

Coincidimos con Llinares y Sánchez (1997, p. 55) cuando afirman que «sobre esta interpretación se basan generalmente las secuencias de enseñanza cuando se introducen las fracciones (normalmente en su representación continua). Parece ser que tiene una importancia capital para el desarrollo posterior de la idea global de número racional». De igual manera Freudenthal (2002, p. 140) ya asumió que «en la constitución mental de todas las clases de magnitudes, repartir en partes equitativas me parece un eslabón importante —más importante que lo que los psicólogos investigan bajo el nombre de conservación —» y subrayó la importancia de las transformaciones de composición y descomposición para el desarrollo de las magnitudes como objetos mentales. El diseño explícito de tareas puede potenciar esta conexión entre repartir en partes congruentes (comparación de la composición y descomposición de la unidad de referencia) y el desarrollo de las magnitudes como objetos mentales, entendido como otro de los sub-constructos de las fracciones.

Además, la necesidad de trabajar distintas representaciones a partir de una tarea matemática en un contexto personal/social contribuye a la comprensión del concepto de congruencia entre las partes y ofrece la oportunidad de extender el concepto inicial de parte-todo hacia el concepto de operador multiplicativo en su carácter extractivo.

Una de las características distintivas de esta tarea es que su estructura recupera las fases de una situación didáctica (Brousseau, 2007): acción,

formulación, validación e institucionalización, lo cual puede dar la oportunidad de analizar la propia tarea con las lentes conceptuales de esta teoría como metodología de enseñanza.

Objetivos generales

Se busca que el profesorado en formación:

1. Identifique que el número racional expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad (todo o unidad), lo cual representa una división en partes según la cantidad que indica el denominador de la fracción operador, y una multiplicación por las partes que indica el numerador.
2. Reflexione sobre las posibles dificultades del alumnado de Primaria al resolver el problema y sobre las conexiones de significados entre la parte, el todo y el operador multiplicativo.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar la tarea, el profesorado en formación necesita tener conocimientos sobre:

- ▶ Concepto de fracción.
- ▶ Diferentes representaciones de la fracción.
- ▶ Equivalencia de fracciones y operaciones básicas (suma, resta y multiplicación de fracciones).

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Para la aplicación de la tarea, se recomienda ir entregando las actividades de una en una, con la finalidad de favorecer la reflexión y la acción personal de los resolutores antes de continuar con el resto de la tarea.

En la actividad 1 es importante que el profesorado en formación resuelva el problema y discuta el significado de fracción que se emplea y su representación. Una variable importante es ampliar la posibilidad de que la representación gráfica del terreno no sea solo rectangular o cuadrada, sino que adopte la forma de cualquier otro polígono.

La actividad 2 tiene como finalidad no solo que el futuro profesorado reconstruya el razonamiento seguido en una opción de respuesta, sino, sobre todo, que amplíe su rango de posibilidades de respuesta y las compare (esto cobra sentido en la fase de discusión-validación) con la respuesta personal. Se asume que esta forma de presentar las opciones de respuesta (para que los estudiantes las completen) contribuye, en una etapa inicial, a la construcción del conocimiento interpretativo del profesorado, que aprende a comprender estrategias y enfoques inesperados y a dar sentido al razonamiento de los estudiantes.

Las actividades 3 y 4, en congruencia con la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007), cierran el proceso de la tarea institucionalizando los conceptos didácticos y matemáticos trabajados a lo largo de su desarrollo.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Ficha de trabajo.
- ▶ Papel cuadriculado.
- ▶ Regla o material de geometría.

Actividad 1. Valoración de conocimientos previos

Descripción

La consigna de la actividad es: «En diferentes situaciones se usan las fracciones como parte-todo. Enumerad los ejemplos más comunes que conozcáis».

Se propone al profesorado en formación la primera parte de la actividad como tarea de inicio de la sesión: la intención es detectar, a partir de las respuestas aportadas, los conocimientos previos de los resolutores. Esto permite definir puntos de partida (según los sujetos que resuelvan el problema) y determinar las oportunidades de gestión en atención a las respuestas que se emitan. En la diversidad de respuestas está la riqueza de la actividad.

Objetivos específicos

- ▶ Recuperar los conocimientos previos del profesorado en formación (según el caso de aplicación de la tarea) en torno a la fenomenología del concepto parte-todo, así como el reconocimiento de los ejemplos contextuales que dan sentido a este concepto.

- ▶ Anticipar potenciales dificultades en la resolución del problema «La parcela de don Jacinto», relacionadas con la comprensión del significado parte-todo y del operador multiplicativo.

Orientaciones didácticas

En esta actividad conviene que quien dirige la formación enfatice que se trabaje de manera individual, sin ningún tipo de interacción con los iguales, dado que se busca favorecer la puesta en juego de los conocimientos personales para que se genere el conflicto cognitivo al abordar la siguiente actividad.

Actividad 2. Resolver el problema «La parcela de don Jacinto»

Descripción

La consigna de la actividad es: «Resolva de manera individual el siguiente problema».

Es importante mencionar que este problema se divide en tres partes; en el proceso de resolución conviene abordarlas de manera continua, pero regulando el tiempo para que se trabajen en un periodo de tiempo similar.

Parte 1. Se plantea la resolución del siguiente problema: «Don Jacinto tiene una parcela. La quinta parte del terreno está sembrada de lechugas; la tercera parte, de rábanos, y el resto, de zanahorias. ¿Qué parte del terreno está sembrada de zanahorias?». Esta resolución debe llevar al profesorado en formación a poner en juego sus conocimientos en torno a la escritura de expresiones simbólicas congruentes con el planteamiento del problema.

Parte 2. Se introduce una variable en el planteamiento inicial: la medida del área total del terreno (60 metros cuadrados) con la intención de que el profesorado en formación determine a cuántos metros cuadrados corresponde cada una de las partes en sembradas de lechugas, rábanos y zanahorias. Este momento es importante porque permite conectar la representación gráfica con la expresión simbólica y reconocer al número 15 como denominador común tanto para identificar una de las longitudes (el largo, si se usa un rectángulo para representar el terreno: $15 \times 4 = 60 \text{ m}^2$) como para realizar la suma de las fracciones: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \underline{\quad} = 1$. Se consideran expresiones equivalentes como las siguientes: $1 = \frac{15}{15}$; $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$; $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$; $\frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$; $\frac{15}{15} - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$, que es la respuesta a la pregunta de qué parte del terreno está sembrada de zanahorias.

Para determinar a cuántos metros cuadrados corresponde cada parte, el 15 sigue siendo relevante, dado que, al dividir 60 entre 15, el resultado (4) indica la cantidad de metros cuadrados en cada quinceavo. Este resultado se multiplica por la cantidad de quinceavos (el numerador) que corresponden a la parte de terreno sembrada con cada

hortaliza: lechugas $3/15$ ($4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$), rábanos $5/15$ ($4 \times 5 = 20 \text{ m}^2$) y zanahorias $7/15$ ($4 \times 7 = 28 \text{ m}^2$). Esta es, por supuesto, solo una forma de resolución; es precisamente la riqueza de la tercera parte de esta actividad la que ofrece la oportunidad para la discusión y confrontación de los procedimientos propuestos en la actividad 3.

Parte 3. En este momento, la variable del problema consiste en la «exigencia» de que el profesorado en formación piense y decida una forma de representación del terreno y realice el reparto de manera gráfica. El diseño de la actividad permite que el profesorado en formación elija el tipo de polígono que va a utilizar; sin embargo, se orienta hacia la determinación del largo y el ancho del terreno, con el fin de que se identifique el denominador común de la suma de fracciones (el número 15). Esta orientación no debe ser limitante: conviene que, a partir del análisis de lo que está escrito en la hoja de trabajo, el profesorado en formación tome la decisión que considere más conveniente.

Objetivos específicos

- ▶ Analizar el uso de expresiones simbólicas y estrategias diversas en el proceso de resolución de una situación problema que pone en juego el significado parte-todo de las fracciones, así como las conexiones con el significado de la fracción como operador multiplicativo.
- ▶ Reflexionar sobre el papel de la representación en la resolución del problema.

Orientaciones didácticas

Se propone continuar trabajando de manera individual durante la resolución de las tres partes del problema; sin embargo, una vez terminado el tiempo asignado para la actividad, es necesaria una puesta en común en plenaria para comparar los distintos procedimientos y las reflexiones, y contrastar las respuestas.

En esta actividad, quien dirige la formación se centra en recorrer los espacios donde se ubica el profesorado en formación y plantear preguntas que pongan en conflicto el proceso de resolución, pero sin proponer de manera explícita expresiones matemáticas o formas de representación convencionales (como el rectángulo por ser la forma más conveniente).

Esta parte de la actividad, en congruencia con la teoría de las situaciones didácticas, debe activar la fase de acción (la resolución autónoma del problema) y la fase de formulación (la necesidad de expresar su respuesta, cuando menos, en dos sistemas de representación: gráfico y simbólico).

En el momento de la plenaria —primer momento de validación, siguiendo la terminología de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007)—, se sugiere centrar la atención en las siguientes cuestiones:

- ▶ Explicad qué forma puede tener el terreno para cumplir con las características.
- ▶ Detallad qué significado de fracción permite resolver la tarea matemática.

- ▶ ¿De qué manera contribuye la determinación del largo y el ancho del terreno a la solución del problema y a su representación gráfica?
- ▶ ¿En qué grado escolar se puede plantear este tipo de problemas? Explicad.
- ▶ ¿Qué significados de la fracción se trabajan en los grados posteriores? ¿Y en los grados anteriores?
- ▶ ¿Cuáles pueden ser algunos de los procedimientos a los que recurra el alumnado para resolver cada uno de los planteamientos anteriores?
- ▶ Detallad las fortalezas y las debilidades que puede presentar el alumnado al resolver la tarea matemática.

Actividad 3. Análisis de estrategias de resolución (segundo momento de validación)

Descripción

En esta parte de la tarea, la intención es que el profesorado en formación analice cuatro procedimientos como medio para validar sus razonamientos. El análisis de las estrategias de resolución busca que se precise que los significados de fracción empleados son diferentes, que existen distintas representaciones y que cada estrategia implica conocimientos previos distintos.

La consigna que se plantea en esta actividad es la siguiente: «Analizad las siguientes estrategias de resolución elaboradas por docentes en formación y completad los razonamientos con las reflexiones que podáis inferir a partir de lo que observáis en las imágenes». La idea es que la propia consigna provoque en el profesorado en formación identificación y empatía, en tanto que los autores de los procedimientos se presentan como iguales; es decir, en teoría deberían manifestar conocimientos y estrategias de resolución similares.

Las cuatro estrategias de resolución centran la atención en aspectos diferentes del problema. En la primera, se divide un rectángulo usando solo la relación del total con las partes para calcular la porción correspondiente a cada zona de siembra (lechugas, rábanos y zanahorias); después se completa el procedimiento con cálculos aritméticos a partir de determinar a cuántos metros cuadrados equivale un quinceavo del terreno.

El segundo procedimiento parte de la cantidad de metros cuadrados del terreno y, a partir de ahí, determina el rectángulo de 15 m de largo por 4 m de ancho como la figura que permite resolver el problema.

En el tercer procedimiento se añade la dificultad de calcular la raíz cuadrada de 60 m^2 para determinar la medida del lado del cuadrado y, a partir de ahí, se procede a realizar los cálculos que permiten resolver el problema.

Finalmente, en el cuarto procedimiento se recurre al procedimiento convencional para sumar las dos fracciones que se proponen explícitamente en el problema y luego restar el resultado de la unidad de referencia, expresada en su fracción equivalente como $15/15$, con lo cual se obtiene la fracción que representa la parte del terreno sembrada de zanahorias. Posteriormente, para determinar la cantidad de metros, se emplea el mismo concepto de parte-todo para obtener la tercera parte, la quinta parte y los siete quinceavos de 60 m^2 .

Objetivos específicos

- ▶ Confrontar los procedimientos de resolución realizados de manera personal con las propuestas de resolución de otros docentes para ampliar los conocimientos sobre el tema.
- ▶ Construir un conocimiento interpretativo que permita valorar las producciones de «otros» para vislumbrar prospectivamente un margen de posibilidades de resolución y de toma de decisiones de actuación práctica.

Orientaciones didácticas

Para validar las respuestas de los resolutores de la tarea y las producciones que se analizan, pueden plantearse las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Qué diferencias encontráis entre los razonamientos que aquí se presentan y el razonamiento que siguieron en el equipo?
- ▶ ¿Qué conocimientos matemáticos están involucrados en la resolución de los problemas?
- ▶ Aparte del tipo de figura utilizada para hacer el reparto, ¿qué diferencias apreciáis en las representaciones gráficas de las producciones 1 y 2? ¿En qué parte del problema centra la atención cada una de las resoluciones —por ejemplo, en la cantidad de partes (15 partes) o en la medida en metros (60 m^2)—? ¿De qué manera el cálculo del denominador común (en las fracciones $1/3$ y $1/5$) contribuye a orientar una estrategia de resolución en la representación gráfica (a diferencia de la que proponen los resolutores)?

Para la gestión de la tarea, quien dirige la formación puede apoyarse en las siguientes cuestiones:

- ▶ ¿Qué podéis decir de los diferentes procedimientos? ¿Cuál o cuáles es más probable que utilice el alumnado de Primaria al resolver el problema?
- ▶ ¿Qué representaciones se emplean en cada estrategia de resolución de la tarea matemática?
- ▶ Explicad si existen distintos significados de la fracción que se ponen en juego en cada estrategia.

- ▶ Estableced conocimientos previos necesarios para cada estrategia de resolución de la tarea matemática.
- ▶ ¿Qué podéis decir de los diferentes razonamientos matemáticos usados por cada estudiante en su estrategia de resolución? ¿De dónde puede provenir la naturaleza de cada razonamiento matemático? Es decir, ¿qué pensamiento puede provocar ese razonamiento matemático en cada estrategia de resolución usada por el alumnado?

Actividad 4. Analicemos matemática y didácticamente el problema

Descripción

Esta actividad conviene que se realice de manera individual, dado que se pretende que el profesorado en formación reconozca tres cuestiones principales en el análisis matemático y didáctico del problema. En un primer momento, el análisis de los procedimientos de la actividad 3 debe llevar al profesorado a reconocer cuál o cuáles pueden ser los procedimientos formales para institucionalizarlos. Dentro de estos, en caso de que no aparezcan, conviene que quien dirige la formación proponga formas de escribir la expresión algebraica en la actividad. Estas podrían discutirse con el profesorado en formación en cuanto a qué pensamiento matemático se emplea en cada expresión, y con ello favorecer la manipulación de expresiones.

$$1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{8}{12} = \frac{7}{15}$$

o

$$x = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

o

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + x = 1$$

o

$$1 - \frac{3}{15} - \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$$

o

$$x = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

En un segundo momento, a partir de la lectura de algunas ideas teóricas, se pretende que el profesorado en formación institucionalice conceptos de carácter didáctico del contenido: el significado de la fracción como parte-todo y como operador multiplicativo, a la vez que comienzan a construir sus propias definiciones al respecto.

En la puesta en común, quien dirige la formación recoge las respuestas del profesorado en formación y destaca los elementos básicos que deben considerarse en sus definiciones.

Finalmente, conviene que quien dirige la formación guíe el análisis de la estructura didáctica de la tarea, con la intención de que el profesorado identifique la teoría didáctica subyacente, en particular la teoría de las situaciones didácticas. Esto servirá como «homología didáctica» respecto a cómo enseñar matemáticas en Primaria.

Objetivos específicos

- ▶ Formalizar los conocimientos matemáticos (institucionalización) puestos en práctica durante la resolución de las tres actividades anteriores.
- ▶ Valorar las estrategias de resolución analizadas en función de las posibilidades de actuación del alumnado de Primaria al resolver un problema similar al propuesto.

Orientaciones didácticas

Se propone una puesta en común en plenaria para comparar distintas reflexiones, contrastar respuestas y, sobre todo, formalizar los conceptos trabajados en las tres actividades anteriores.

Quien dirige la formación se centra en favorecer la discusión colectiva y permitir que el profesorado en formación proponga ejemplos y contraejemplos, cuando menos en las interpretaciones de la fracción que se van a formalizar: parte-todo y operador.

También se sugieren las siguientes cuestiones para la gestión y reflexión en la formación:

- ▶ ¿Qué otras representaciones usaríais (como profesorado en formación) si tuvieseis que enseñar la fracción como parte-todo y como operador?
- ▶ ¿Qué recursos digitales o tangibles usaríais para enseñar la fracción como parte-todo y como operador? ¿Por qué ese o esos?
- ▶ ¿Qué estrategias didácticas usaríais si tuvieseis que enseñar la fracción como parte-todo y como operador, poniendo en juego las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización de la teoría de las situaciones didácticas?
- ▶ ¿Cómo llevaríais a cabo la situación de institucionalización según la teoría de las situaciones didácticas? ¿Qué diferencias pueden establecerse, en una situación de institucionalización, entre una tarea matemática propia de Primaria y una tarea formativa matemática para la formación inicial y continua? Reflexionad sobre ello a fin de hacer un buen cierre de la tarea.

Ruta complementaria para extender la tarea

Se sugiere a quien dirige la formación proponer la lectura del capítulo 4, «La relación parte-todo y las fracciones», en Llinares y Sánchez (1997), con el objetivo de ampliar el conocimiento sobre el significado de la fracción parte-todo y algunas sugerencias para el trabajo inicial con este.

Además, conviene que quien dirige la formación lea previamente la teoría de las situaciones didácticas, por ejemplo en Brousseau (2007), para poder realizar un análisis de la estructura de la lección en torno a las fases de la teoría de las situaciones didácticas. También puede solicitarse al profesorado en formación que lea alguna sección del mismo texto de Brousseau (2007). Se sugiere la lectura de la sección A: «La modelización de las situaciones en didáctica».

Así podrían discutirse cuestiones como:

- ▶ ¿Cuál es la intencionalidad didáctica de cada una de las actividades que habéis resuelto? ¿Reconocéis alguna teoría didáctica que sustente la propuesta de este diseño?
- ▶ ¿Cuáles son los elementos de esa teoría?
- ▶ ¿De qué manera puede incorporarse a la práctica profesional?

Referencias

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales* (Tesis doctoral). Cinvestav-Matemática Educativa.
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X>
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Síntesis.
- OECD. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 3.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Interpretación parte-todo de las fracciones».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
			1	2	3	4	
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Fenomenología	Reconocer distintos tipos de contextos que dan sentido y significado a la fracción, en este caso la relación parte-todo y el operador multiplicativo.	X	X		
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Conocer diferentes tipos de fracciones según la relación entre numerador y denominador.	X	X		X
		Procedimientos	Uso de las expresiones simbólicas para determinar la suma y resta de fracciones.		X		
			Concepto de unidad de referencia.			X	
		Registros de representación	Uso de representaciones icónico-gráficas para ejemplificar el significado de la relación parte-todo.		X		
			Representación de una expresión simbólica; transformación de tratamiento y de conversión entre registros de representación.			X	
	KPM	La práctica de resolver problemas	Fases y heurísticos en la resolución de problemas.		X		
			Uso de gráficos y dibujos como heurísticos para resolver un problema.			X	
		La práctica de demostrar	Construir conjeturas y contraejemplos e ir valorando su papel en la validación como parte de la demostración matemática.			X	
		El papel del lenguaje matemático	Papel de los símbolos convencionales en contextos de validación.			X	
Uso de las convenciones y los símbolos matemáticos.					X		

Tabla 3.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Interpretación parte-todo de las fracciones».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
			1	2	3	4	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Conocer distintas estrategias de resolución de problemas; elección y uso de representaciones que puede realizar el alumnado de Primaria.	X			X	
		Reconocer estrategias de resolución de problemas realizadas por otros docentes; reconocimiento de formas de interacción con el contenido matemático diferentes de las estrategias propias.			X		
		Durante el tránsito de lo concreto (el problema) a lo numérico (la modelación matemática del problema), prevalece el trabajo y el razonamiento con el objeto matemático más que la técnica; además, pueden identificarse diversas formas de resolución de la tarea matemática.	X	X			
		Reconocimiento de dificultades relacionadas con la extensión de la fracción como operador multiplicativo.				X	
	KMT	Teorías de enseñanza de las matemáticas	Reconocimiento de los elementos de la teoría de las situaciones didácticas como metodología de enseñanza: preparación del medio, fase de acción, formulación y validación.			X	X
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Reconocer diversidad de ejemplos que dan sentido a un concepto de fracción.	X			
Reconocimiento y análisis de posibles estrategias de resolución.				X			

Hojas de trabajo Interpretación parte-todo de las fracciones

ACTIVIDAD 1. Valoración de conocimientos previos



En diferentes situaciones se usan las fracciones como parte-todo. Enumera los ejemplos más comunes que conozcas:

ACTIVIDAD 2. La parcela de don Jacinto

2.1. Resuelve de manera individual el siguiente problema:

Don Jacinto tiene una parcela. La quinta parte del terreno está sembrada de lechugas; la tercera parte, de rábanos, y el resto, de zanahorias. ¿Qué parte del terreno está sembrada de zanahorias?



Piensa en una expresión matemática para calcular la parte del terreno que está sembrada de zanahorias.

2.2. Si el terreno mide 60 m^2 , ¿cuántos metros cuadrados ocupan las lechugas? ¿Cuántos los rábanos? ¿Cuántos las zanahorias? ¿Cómo representarías de manera gráfica el reparto del terreno para la siembra de cada una de las plantas?

2.3. Representa, con la figura que te parezca más conveniente, la forma en que queda dividido el terreno para la siembra de las lechugas, rábanos y zanahorias.

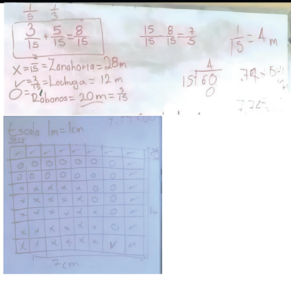
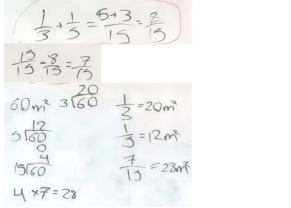



¿Se podría partir en partes o dibujar, dividir? ¿Cuál forma puede tener el terreno? ¿Cuál forma es más conveniente? ¿Será necesario determinar el largo y ancho del terreno? Piensa en la forma como puedes representar cada parte.

ACTIVIDAD 3. Análisis de estrategias de resolución

Analiza las siguientes estrategias de resolución elaboradas por docentes en formación y completa los razonamientos con las reflexiones que puedas inferir a partir de lo que observas en las imágenes.

<p>LECHUGA $\frac{1}{5}$</p> <p>R A B A N O S</p> <p>Z A N A H O R I A S</p> <p>Lechugas $\frac{1}{5} = 12 \text{ m}^2$</p> <p>Rábanos $\frac{1}{3} = 20 \text{ m}^2$</p> <p>Zanahorias $\frac{1}{15} = 4 \text{ m}^2$</p> <p>$5 \sqrt{60} \quad 3 \sqrt{60} \quad 15 \sqrt{60}$</p> <p>Yo consideré un cuadrado como la forma del terreno; primero lo dividí horizontalmente en "quintos" y de ahí tomé $\frac{1}{5}$, que es lo que se sembró con lechuga.</p>	<p>Enseguida dividí verticalmente en "tercios", para tomar $\frac{1}{3}$ para la siembra de rábanos, sin embargo, noté que me faltaba una de las partes, porque ya estaba sembrada con lechugas (esta parte representa $\frac{1}{15}$ del total del terreno), entonces la tomé de la parte inferior del segundo tercio. Para saber qué parte del terreno quedó sembrada de zanahoria, $\frac{1}{15}$ son $\frac{1}{15}$ de 60, que es igual a 4.</p> <p>Para determinar cuántos metros ocupa cada siembra, dividí $60 \div 15 = 4$ (porque son las partes en que quedó dividido todo el terreno) y el resultado lo multipliqué por la cantidad de partes que corresponden a cada siembra. Lechuga: $4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$</p> <p>Rábano: $4 \times 5 = 20 \text{ m}^2$</p> <p>Zanahoria: $4 \times 1 = 4 \text{ m}^2$</p>
<p>Lechuga Rábanos Zanahorias</p> <p>$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{15}$</p> <p>$15 \text{ m}$</p> <p>$3 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$</p> <p>$5 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$</p> <p>$3 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$</p>	<p>Yo primero dibujé un rectángulo de 15 m de largo por 4 m de ancho, lo cual nos da un área de 60 m^2, que es la superficie total del terreno; después de eso, me fijé en los cuadrillos</p> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

 <p>Handwritten work showing fraction addition: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, and $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$. It also includes a grid for area calculation with dimensions 15m and 12m.</p>	<p>Yo busqué fracciones equivalentes a $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$, y estas son _____ y _____ respectivamente; luego</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>Para la representación gráfica, busqué la raíz cuadrada de 60m, para determinar la medida del lado de un terreno cuadrado, luego</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>
 <p>Handwritten work showing fraction addition: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, and $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$. It also includes area calculations: $60m^2 \div 3 = 20m^2$, $\frac{1}{3} = 20m^2$, $\frac{1}{5} = 12m^2$, and $\frac{7}{15} = 28m^2$.</p>	<p>En mi caso usé el procedimiento convencional, el cual consiste en</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>Para encontrar la cantidad de metros cuadrados en que se sembró cada producto, lo que hice fue _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>

ACTIVIDAD 4. Analicemos matemática y didácticamente el problema 

¿Qué puedes decir de los diferentes procedimientos? ¿Cuál o cuáles es más probable que utilice el alumnado de Primaria al resolver el problema inicial? ¿De qué manera escribirías una expresión algebraica que sintetice los procedimientos de resolución?

Escribe un comentario con tus reflexiones al analizar los procedimientos anteriores.

A continuación, te planteamos algunas ideas para «institucionalizar» los conocimientos didácticos:

La interpretación de la fracción como parte-todo, a decir de Llinares (1997).

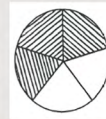
Se presenta esta situación cuando un «todo» (continuo o discreto) se divide en partes «congruentes» (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de «objetos»). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios «todos»).

El todo recibe el nombre de unidad. Esta relación parte-todo depende directamente de la habilidad de dividir un objeto en partes o trozos iguales.

La situación más común para trabajar la idea de la fracción como parte-todo es la siguiente:

Para indicar la relación que existe entre la parte sombreada y un «todo»,

«tres de las cinco partes», $3/5$.



También podemos establecer una relación parte-parte, como en el siguiente ejemplo

En un grupo de niños y de niñas hay diez niñas y cinco niños. En un momento determinado alguien dice: «Hay la mitad de niños que de niñas» (hay el doble de niñas que de niños). La expresión *mitad* está empleada en esta situación para describir una relación entre dos partes de un conjunto. Se ha realizado una comparación parte-parte y como resultado de esta comparación se utiliza una fracción para cuantificar la relación.

Sin embargo, el problema planteado al inicio en una primera parte implica el establecimiento de la relación parte-todo, pero fácilmente se puede extender su análisis hacia la multiplicación de una fracción por un número natural, principalmente en el papel de operador, por ejemplo, cuando nos preguntamos por $1/5$, $1/3$ o $7/15$ de 60 metros; esto nos puede llevar a generar los siguientes procedimientos:

$$60 \times \frac{1}{5} = \frac{60}{5} = 12 \text{ m}$$

$$60 \times \frac{1}{3} = \frac{60}{3} = 20 \text{ m}$$

$$60 \times \frac{7}{15} = \frac{420}{15} = 28 \text{ m}$$

En estos casos, « $1/5$ de 60» puede ser interpretado como una fracción que actúa sobre un número (operador), es decir, una acción más que la descripción de una situación.

En el siguiente espacio escribe tu definición sobre los siguientes conceptos:

Fracción como parte-todo:

Fracción como operador multiplicativo:

4. Evaluación del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas construido a través de la formulación de problemas de fracciones

Juan Pedro Martín-Díaz

<https://orcid.org/0000-0001-6522-824X>

Universidad Huelva (España)

M. Isabel Pascual

<https://orcid.org/0000-0002-6429-2968>

Universidad de Sevilla (España)

Miguel Montes

<https://orcid.org/0000-0003-3181-0797>

Universidad Huelva (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria

Duración aproximada de la aplicación: 2 horas

Fundamentación

La formulación de problemas se ha utilizado como herramienta para la construcción de conocimiento matemático desde hace más de treinta años (Cai *et al.*, 2022; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Singer *et al.*, 2015). Su uso se ha basado en la proposición de tareas por parte del profesorado, que las emplea para formular problemas para su alumnado.

Entendemos que el profesorado, desde su formación inicial, necesita saber cómo formular buenos problemas matemáticos atendiendo, por ejemplo, a objetivos educativos concretos. Se asume, por otro lado, que se requiere un conocimiento específico de la profesión docente para po-

der llevar a cabo ciertas tareas profesionales (Ball, *et al.*, 2008; Bromme, 1994; Carrillo *et al.*, 2018; Shulman, 1986; Tatto *et al.*, 2008).

La tarea que aquí se presenta tiene como función principal evaluar el conocimiento del profesorado en formación sobre formulación de problemas en relación con distintas categorías del modelo MTSK. Esto puede servir para identificar aquellos elementos que, de forma generalizada, resultan más complejos para el profesorado en formación y, a la vez, detectar dificultades en el uso del conocimiento.

Objetivos generales

Con esta tarea se pretende:

1. Evaluar el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) del profesorado en formación en relación con las fracciones y los problemas aditivos y multiplicativos.
2. Identificar las dificultades del profesorado en formación en la formulación de problemas.

Conocimientos, habilidades o competencias previas

Para abordar la tarea, el profesorado en formación debería tener conocimientos sobre:

- ▶ Tipos de estructura que pueden conformar los problemas (aditiva o multiplicativa).
- ▶ El concepto de fracción, sus representaciones, tipos y significados.
- ▶ Dificultades de aprendizaje que el alumnado de Primaria puede presentar durante la resolución de un problema.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Es recomendable trabajar algunas referencias bibliográficas relacionadas con las dificultades de aprendizaje en la resolución aritmética de problemas (Albarracín *et al.*, 2018; Neagoy, 2017; Roa, 2001).

Esta tarea de evaluación requiere que previamente se hayan trabajado en el aula formativa los conceptos que se indican en la descripción de la actividad.

Actividad 1

Descripción

Se solicita al profesorado en formación que formule un problema de al menos dos etapas en el que haya una suma y una multiplicación de fracciones como mínimo. Posteriormente, se le pide que reflexione acerca del problema planteado, de manera que se movilicen conocimientos relativos a los conceptos trabajados en clase para responder a las siguientes actividades.

La actividad 1.1 pretende activar conocimientos sobre fracción propia, impropia y número mixto, y relacionarlos con los significados de la fracción: parte-todo, operador, razón y cociente de enteros (Castro y Torralbo, 2001). Todo ello al preguntar sobre el tipo de fracción resultante y los significados de las fracciones empleadas.

En la actividad 1.2 se pregunta por el tipo de problema aditivo y el multiplicativo que ha construido cada estudiante. En relación con los problemas aditivos, se movilizan conocimientos referentes al significado unitario (cambio: unión o separación) y al significado binario (comparación, igualación, combinación). Respecto a los problemas multiplicativos, se abordan distintas interpretaciones de la multiplicación (suma reiterada, producto cartesiano) y de la división (división partitiva, cuotitiva, inversa de la multiplicación) (Carpenter y Moser, 1983; Castro, 2001).

En la actividad 1.3 se pide al profesorado en formación que resuelva el problema representando las fracciones de forma gráfica para reflexionar sobre el uso de los modelos lineales, de área o de conjunto (Carrillo *et al.*, 2016).

Por último, en la actividad 1.4 se solicita identificar posibles errores y dificultades en la resolución de los problemas (por parte del alumnado de Primaria), tanto gráfica como aritméticamente. Esta última actividad pretende explorar conocimientos sobre las dificultades en el aprendizaje de las fracciones, tales como la dificultad para comprender el significado de razón mediante representaciones de área o de recta; la complejidad para representar fracciones impropias con modelos de área, o el uso de representaciones de área en las que las partes no son congruentes (Dickson *et al.*, 1991; Llinares y Sánchez, 1988; Roa, 2001).

Orientaciones didácticas

Dado que la evaluación de esta tarea ha de ser sensible a los principios evaluativos del plan de estudios en el que se enmarca, planteamos una hipótesis de progresión en la evaluación (en línea con Montes *et al.*, 2021) para así poder graduar, de algún modo, el desempeño del profesorado en formación. De este modo, proponemos tres niveles para los apartados 1.1, 1.2 y 1.3:

- ▶ Nivel 0 (carencia de conocimiento o ausencia de justificación). El profesorado en formación plantea un problema con graves incoherencias matemáticas que impiden su resolución, o aporta un enunciado pero no justifica su respuesta.
- ▶ Nivel 1 (uso no relacional). El profesorado en formación plantea, de forma justificada, un problema que, si bien refleja conocimiento de determinados elementos (significado y tipo de las fracciones, tipo de problema, representación, etc.), revela falta de relación entre elementos matemáticos.
- ▶ Nivel 2 (uso relacional). El profesorado en formación plantea, de forma justificada, un problema que refleja soltura en el uso de los elementos solicitados, así como en el planteamiento de justificaciones coherentes. En función de la existencia de errores menores puntuales, se situará en un punto más alto o más bajo dentro de este nivel.

El apartado 1.4, se evaluará según estos mismos tres niveles, pero vinculados al conocimiento didáctico del contenido:

- ▶ Nivel 0. No se identifican errores potenciales o no se justifica la respuesta.
- ▶ Nivel 1 (uso no relacional). Se proponen errores con una justificación bastante genérica que no se relaciona claramente con el problema.
- ▶ Nivel 2. Se identifican errores potenciales con un buen grado de justificación y relación con el problema.

Referencias

- Albarracín, L., Badillo, E., Giménez, J., Vanegas, Y. y Vilella, X. (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria*. Síntesis.
- Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. SträBer y B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Reidel.
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119-145). PME.
- Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Lawrence Erlbaum Associates.

- Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D. y Flores, E. (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Paraninfo.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 203-230). Síntesis.
- Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 285-314). Síntesis.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. MEC y Labor.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Lawrence Erlbaum Associates.
- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Las fracciones*. Síntesis.
- Montes, M., Pascual, M. I., y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 24(1), 83-104. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2414>
- Neagoy, M. (2017). *Unpacking Fractions: Classroom Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding*. NCTM.
- Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 231-256). Síntesis.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (eds.). (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. Springer.
- Tatto, M. T., Schewille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and development study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice and readiness to teach primary and secondary mathematics*. Conceptual framework. Michigan State University.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 4.1. Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Evaluación del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas construido a través de la formulación de problemas de fracciones».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades			
			1.1	1.2	1.3	1.4
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Elementos matemáticos asociados a las fracciones (tipos de fracciones).	X			
		Tipos de problema aditivo o multiplicativo.		X		
		Significados de las fracciones implicados.		X		
		Operaciones básicas con fracciones.			X	
	Registros de representación	Representación gráfica de fracciones.			X	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Uso de la fracción con partes no congruentes.				X
		Dificultades en la comprensión y aplicación del procedimiento de multiplicación de fracciones.				X
		Dificultades en la representación de las operaciones (suma y multiplicación) de fracciones.				X
		Dificultades en la representación de algunos significados o tipos de fracciones (p. ej., fracción impropia o significado de razón).				X
KPM	La práctica de resolver problemas	Reconocer la estructura de los problemas.		X		
CEAM		La formulación como fuente de problemas adaptados a diferentes características de aprendizaje del alumnado.	X	X	X	X

5. Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción

Laura Rifo

<http://orcid.org/0000-0003-3181-0797>

Universidade Estadual de Campinas (Brasil)

Nuria Climent

<https://orcid.org/0000-0002-0064-1452>

Universidad de Huelva (España)

Lorenzo Castilla

<https://orcid.org/0000-0002-0806-8312>

Universidad de Huelva (España)

M. Isabel Pascual

<https://orcid.org/0000-0002-6429-2968>

Universidad de Sevilla (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria

Duración aproximada de la aplicación: 2 horas

Fundamentación

En situaciones cotidianas usamos la probabilidad para tomar decisiones. Sin embargo, el pensamiento probabilístico escolar queda restringido a observar resultados del lanzamiento de dados o extracciones de urnas, sin un objetivo que dé sentido a ese tipo de dinámica. Basándonos en el experimento de Bayes, proponemos una actividad centrada en el razonamiento en situaciones de incertidumbre o de falta de información.

En su artículo póstumo, el filósofo, matemático y reverendo inglés Thomas Bayes describe el siguiente experimento hipotético. Supongamos que una persona se sienta de espaldas a una mesa cuadrada, y lanza al azar hacia atrás una bola de arena roja, sin ver en qué lugar de la mesa ha caído. Si esa persona tuviera que adivinar la posición de la bola en la mesa, ¿cuál sería su mejor apuesta?

Supongamos ahora que esa persona puede recopilar información lanzando bolas negras al azar hacia atrás sobre la mesa, mientras otra persona le indica la posición de cada bola negra respecto de la roja (por ejemplo: «más abajo y más a la izquierda»). Con estos nuevos datos, ¿cómo cambia la apuesta inicial?

Al lanzar la bola roja, sin tener ninguna información y suponiendo que puede haber caído en cualquier lugar de la mesa sin preferencia por ninguna zona, la intuición nos dice que la mejor estimación es el centro de la mesa. Asimismo, los métodos estadísticos confirman esta intuición al asociar el proceso de estimación a una función de pérdida, que mide el coste de nuestros errores. Según la lógica de la inferencia estadística, la mejor estimación es aquella con menor pérdida esperada. En una función de pérdida usual, el coste depende de la distancia entre la estimación y la posición real de la bola roja. En este caso, el centro de la mesa es el punto con menor distancia esperada, debido a la simetría de la mesa y a la ausencia total de información inicial.

Tras lanzar solo la bola roja, pueden encontrarse ideas como «no hay una mejor apuesta porque no se puede saber» (imposibilidad), «puedo decir una posición, pero da igual porque todas tienen la misma probabilidad» (indiferencia), o «escojo este punto por esta razón» (preferencia explícita). En el caso de la indiferencia, la comparación entre dos posibles apuestas permite analizar las diferencias entre ellas. Por ejemplo, en una cuadrícula que representa el primer cuadrante, consideremos las apuestas $(1,1)$ y $(3,2)$. En la figura 5.1, la zona roja indica las posiciones en que ganaría $(1,1)$ —es decir, donde $(1,1)$ está más cerca de la posición de la bola roja que $(3,2)$ —, y la zona azul, las posiciones en que ganaría $(3,2)$. Del mismo modo comparamos las apuestas $(0,0)$ y $(2,2)$:

Se puede observar que hay apuestas mejores que otras. A la pregunta de cuál es la mejor apuesta, por simetría, solo puede ser el centro. Además, puede verse que las apuestas más cercanas al centro son mejores que las más alejadas.

A medida que avanzamos en el experimento y obtenemos información de las bolas negras, nuestra estimación puede hacerse más precisa. Por ejemplo, si la bola roja queda siempre al sur de las cinco bolas negras lanzadas, esto indica que la bola roja se encuentra con mayor probabi-

lidad hacia el sur de la mesa. Determinar con qué probabilidad puede hacerse esta afirmación es lo que impulsó, en la historia de la matemática, el desarrollo de la probabilidad condicional de un suceso a partir de la información obtenida con un conjunto de datos.

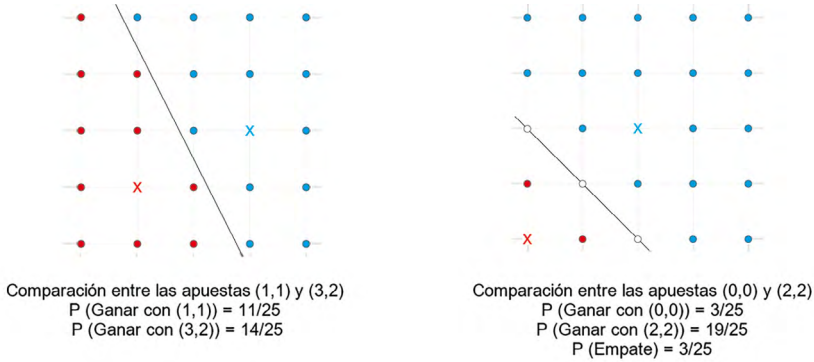


Figura 5.1. Comparación entre apuestas respecto de la distancia a la bola roja.

Los resultados del experimento pueden evaluarse desde los componentes del modelo ISI (citado en De Vetten *et al.*, 2019): 1) la muestra como evidencia, su papel en la inferencia y la descripción de su significado; 2) el proceso de generalización en afirmaciones probabilísticas, y 3) la presencia de incertidumbre en las inferencias.

Con su trabajo, Bayes plantea el problema de cómo aprendemos de los datos y la fundamentación lógica de la respuesta que deberíamos obtener. El cálculo explícito lo proporciona la llamada fórmula de Bayes, sobre la probabilidad condicionada, fórmula que, en realidad, fue desarrollada y publicada por Laplace años después, en 1814.

Objetivos generales

Se busca que el profesorado en formación:

1. Reflexione sobre la importancia del razonamiento probabilístico como resultado de una actitud racional frente a la incertidumbre o la falta de información.
2. Desarrolle conocimiento matemático sobre inferencia estadística informal: representación y análisis de una muestra, descripción del proceso inferencial e incertidumbre de dicha inferencia (De Vetten *et al.*, 2019).

3. Conozca situaciones relacionadas con la probabilidad, diferentes de las de dados y urnas de composición conocida, vinculadas a la predicción.
4. Aprenda a estimar utilizando la información disponible en cada momento, y discuta criterios de optimalidad (más probable, mayor promedio, menor pérdida, etc.).
5. Considere qué información obtener y cómo usarla para hacer predicciones y tomar decisiones.
6. Reflexione sobre los procesos matemáticos empleados para tomar decisiones a partir de la información disponible.
7. Analice el experimento de Bayes y explore su posible aplicación en Educación Primaria.
8. Conozca actividades para el aprendizaje de la incertidumbre en Educación Primaria.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

No se requieren conocimientos previos específicos para resolver la tarea. Puede plantearse como una tarea introductoria de probabilidad que el profesorado en formación pueda resolver con estrategias de distinto grado de sofisticación.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

De manera general, se propone trabajar toda la tarea en pequeños equipos como primera aproximación a las actividades, para luego realizar puestas en común que permitan consensuar las conclusiones de cada actividad.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Un saco de un color (rojo) y cinco sacos de otro color diferente (negro).
- ▶ Una mesa.
- ▶ Hojas de registro para el observador y el lanzador.
- ▶ Dispositivo para tomar fotos.

Actividad 1. Replicamos el experimento de Bayes

Descripción

La actividad comienza con una introducción de quien dirige la formación para situar al profesorado en formación en la dinámica del experimento. A continuación, se desarrolla el experimento en pequeños grupos, seguido de una discusión en cada grupo y, finalmente, una puesta en común en gran grupo.

Introducción

Durante la introducción, quien dirige la formación explicará en qué consiste el experimento de Bayes y realiza una demostración con dos participantes:

- ▶ Tirador o tiradora: quien se coloca de espaldas a una mesa, pegado a ella.
- ▶ Observador u observadora: quien coloca el saco rojo, equivalente a la bola roja del experimento de Bayes, sobre la mesa.

A continuación, quien dirige la formación pregunta: «¿Dónde crees que se encuentra el saco? ¿Por qué lo crees?». Seguidamente, el tirador lanza seguidamente un primer saco negro (bola negra). El observador, situado en la misma posición que el tirador pero mirando hacia la mesa, describe la posición del saco negro. Esta descripción debe ser cualitativa, por ejemplo «arriba y a la derecha del saco rojo», pero no debe hacer referencia a distancias, como «muy a la derecha del saco rojo, casi en el borde de la mesa». Debe aclararse a quien tira qué significan arriba/abajo y derecha/izquierda respecto del saco rojo.

Tras esta demostración, con solo estos dos sacos, quien dirige la formación explica que, en cada realización del experimento (cinco tiradas), una persona hará de tirador y otra de observador. Después de las cinco tiradas, el tirador debe predecir dónde cree que está situado el saco inicial. El juego se realiza en los grupos de trabajo, de modo que cada persona del grupo tire al menos una vez. Ganará quien más se aproxime a la posición del saco rojo.

Desarrollo del experimento

Tras la introducción con la demostración del experimento, el profesorado en formación se dispone en pequeños grupos conformados, si es posible, por parejas que alternan los papeles de observador y tirador, y recoge en cada caso los datos según la hoja correspondiente de trabajo. Cada grupo dispone de una ficha para recoger información tanto grupal como de cada tirador y observador. El experimento se repete tantas veces como integrantes tenga el grupo, de modo que todas las personas participen una vez como tirador y otra como observador.

La actividad consta de varias hojas de trabajo. Es importante que la última (de reflexión grupal) se reparta después de que cada grupo haya realizado todas las tiradas del experimento y completado las hojas anteriores.

Puesta en común

Una vez completado el trabajo en los pequeños grupos, se realiza una puesta en común con todos los grupos de las respuestas a las preguntas de reflexión grupal. A continuación, se ofrecen algunas preguntas complementarias para dinamizar la discusión de las preguntas del guion.

En relación con las preguntas que se realizan en las hojas de trabajo como parte de la reflexión grupal de esta primera actividad, quien dirige la formación puede tener en cuenta las siguientes cuestiones:

En la pregunta 1.6 («Cuando habéis jugado como tiradores, ¿cómo habéis registrado la información que os daba el observador?»), se puede sugerir la comparación entre registros gráficos, numéricos, tabulares o textuales, por ejemplo.

La idea con la pregunta 1.7 («¿Cómo os ha ayudado, a cada uno, la forma de registro usada para hacer la predicción?») es ver la utilidad de cada uno de los registros anteriores. Una posibilidad, si el profesorado en formación tiene dificultades para comunicar sus ideas, es que registre en la pizarra la simulación de una observación.

Cuando se discuta la pregunta 1.8 («¿Cambiaron vuestras predicciones iniciales después de realizar el experimento? ¿Por qué sí o por qué no?»), se pretende reflexionar sobre las justificaciones de la apuesta inicial y cómo la muestra lleva o no a modificarla. En relación con la apuesta inicial, puede discutirse si todas las apuestas iniciales son igual de acertadas. En este sentido, podrían introducirse las ideas expuestas en la fundamentación sobre la indiferencia, con preguntas informales del tipo: «Si hiciéramos una apuesta sobre la posición del saco rojo y ganara quien más se acerque, ¿apostarías por una esquina de la mesa? ¿Por qué? Si no, ¿qué apuesta crees que es la mejor?».

El profesorado en formación puede explicar que no ha modificado su apuesta inicial por cuestiones que le hacen considerar poco fiable la muestra (por ejemplo, «son pocos lanzamientos», «he lanzado muy fuerte», «he lanzado siempre hacia la derecha»). En este caso, cabría preguntarle cómo estas cuestiones han condicionado la información obtenida de las tiradas. Estos aspectos hacen referencia al método de muestreo y a la incertidumbre en las inferencias (De Vetten *et al.*, 2019), y pueden discutirse en este momento o más adelante, como se propondrá en relación con la pregunta 1.9.

Con la pregunta 1.9 («¿Qué razonamientos o procedimientos matemáticos habéis usado como tiradores para decidir dónde estaba el saco rojo después de realizar el experimento?») podrían relacionarse procedimientos como el conteo o la proporción respecto del total de tiradas, la modelización de la mesa con un plano cartesiano o la representación de los resultados con un experimento probabilístico.

Puede plantearse la pregunta de si alguna herramienta estadística ha servido en este proceso, y cómo podrían asignarse las áreas que ocuparían los cuadrantes a partir de los resultados obtenidos. Esta pregunta se responde típicamente mediante las frecuencias observadas en cada una de las cuatro regiones. Así, si se observara una proporción de lanzamientos de 1 a 4 entre izquierda y derecha, podría inferirse que el saco rojo está más hacia la izquierda, en esa misma razón de 1 a 4. Este razonamiento es análogo al que se emplea cuando se usa la proporción de una muestra para inferir las proporciones en la población. En el experimento, las proporciones poblacionales representan qué parte del área de la mesa queda a cada lado del primer saco. La objeción a este enfoque es la siguiente: ¿qué cabría decidir si se hubiera obtenido una proporción en la muestra de 0 (a la izquierda) a 5 (a la derecha)? Claramente, esto no permite inferir que el saco rojo esté justo en el borde izquierdo, aunque esa fuera la conclusión lógica. El pensamiento inferencial estadístico enseña a ponderar la información contenida en la muestra obtenida y en la apuesta inicial, en la que se escogía el centro como mejor opción. La apuesta inicial se trata como una muestra, más o menos informativa según la confianza depositada en ella, en la que se observa, por ejemplo, un valor en cada posibilidad (arriba/izquierda, arriba/derecha, abajo/izquierda, abajo/derecha).

En este punto, tiene sentido plantear el grado de incertidumbre ante la inferencia realizada, esto es, que la inferencia puede ser más o menos fiable en función de la calidad de la información que arroja la muestra.

Para discutir sobre esto, pueden plantearse al profesorado en formación las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Hasta qué punto estáis seguros de que la muestra obtenida permite hacer la mejor apuesta? ¿Todos los lanzamientos han aportado la misma información en términos de relevancia para esta decisión? ¿Cuál ha sido el papel del tipo de lanzamiento (dirección, fuerza) en el resultado obtenido?
- ▶ ¿Qué modificaciones de las reglas haríais para asegurar una mejor muestra (en términos de cambio en las instrucciones)?

Con las preguntas 1.10 y 1.11 se pretende que el profesorado en formación reconozca que la actividad permite trabajar contenidos curriculares de probabilidad de Primaria, y que discuta su posible adaptación a esta etapa. La posibilidad de adaptar esta actividad a Educación Primaria dependerá, en gran medida, de la discusión anterior. El profesorado en formación podría discutir qué contenidos o destrezas matemáticas presentes en el currículo de Educación Primaria se pueden trabajar, lo que ayudaría a situar la actividad en un curso determinado. Estos contenidos o procesos no se limitan a los del bloque correspondiente, pues se trabajan también, por ejemplo, el área desde el punto de vista geométrico y las relaciones de proporción, entre otros. Competencias matemáticas como la representación o la modelización,

en el sentido de la alfabetización matemática de PISA, están presentes en la actividad y pueden adaptarse a Educación Primaria. Las aportaciones del profesorado en formación y la orientación de quien dirige la formación en este sentido pueden servir para reflexionar sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje asociados a estos contenidos.

Las adaptaciones de la actividad derivadas de la gestión de la tarea, de las concepciones del alumnado sobre la probabilidad o de la complejización o simplificación de la tarea servirán para analizar el potencial de la actividad desde el punto de vista de la enseñanza y de la interacción del alumnado con la tarea, como parte de las características de aprendizaje asociadas a los contenidos matemáticos.

Objetivos específicos

- ▶ Reflexionar sobre la importancia del razonamiento probabilístico como resultado de una actitud racional frente a la incertidumbre o la falta de información.
- ▶ Conocer situaciones relacionadas con la probabilidad, diferentes de las de dados y urnas de composición conocida, vinculadas a la predicción.
- ▶ Considerar qué información obtener y cómo usarla para hacer predicciones y tomar decisiones.
- ▶ Reflexionar sobre los procesos matemáticos empleados para tomar decisiones a partir de la información disponible.
- ▶ Analizar el experimento de Bayes y explorar su posible aplicación en Educación Primaria.
- ▶ Conocer actividades sobre el aprendizaje de la incertidumbre en Educación Primaria.

Orientaciones didácticas

En lugar de que cada grupo utilice seis sacos, lo que puede requerir de mucho material, basta con disponer de uno e ir marcando con tiza o algo similar sobre la mesa la posición en la que cae. Los sacos pueden ser bolsitas pequeñas (de 3 o 4 cm de lado, por ejemplo) rellenas de cualquier material, como arroz, de modo que se queden en el sitio en que caen.

Se recomienda que, antes de implementar las actividades, quien dirige la formación vea el vídeo *Bayesian Statistics with Hannah Fry* (The Royal Institution, 2015), donde se reproduce el experimento de Bayes, y lea el documento de De Vetten *et al.* (2019).

Se sugiere que quien dirige la formación modere la discusión, señale los aspectos importantes, recoja la información y oriente las reflexiones de los distintos equipos. El objetivo es alcanzar las metas planteadas y desarrollar los conocimientos especializados propuestos de manera constructiva mediante la reflexión colectiva.

Actividad 2. Consensuamos una predicción

Descripción

En esta actividad se proponen primero unos resultados hipotéticos del experimento anterior para que, por grupos, se formule una predicción, que después se discute en asamblea. En esta asamblea se realiza una síntesis de las dos actividades, de forma que la tarea incluya un espacio de institucionalización de los aprendizajes.

El análisis compartido de unos mismos resultados puede servir para institucionalizar el contenido trabajado en la sesión. Esta actividad aborda el mismo contenido que la actividad 1, pero permite hacer explícitos los métodos de trabajo del profesorado en formación. A continuación se presenta un análisis del ejemplo propuesto con ideas que quien dirige la formación puede usar en el aula. La tabla que se presenta al profesorado en formación muestra información sobre la localización de los lanzamientos respecto del saco rojo como una única variable con cuatro posibles categorías: izquierda/arriba, izquierda/abajo, derecha/arriba, derecha/abajo. Alternativamente, puede considerarse como información sobre dos variables: posición horizontal respecto del saco rojo (a la derecha o a la izquierda) y posición vertical (arriba o abajo), como en la tabla 5.1.

Tabla 5.1. Resultados hipotéticos del experimento de la actividad.

	Izquierda	Derecha	Total
Arriba	2	0	2
Abajo	2	1	3
Total	4	1	5

La tabla de esta actividad resulta quizá más intuitiva para la clase. Sin embargo, la representación en dos variables es más flexible y permite construir modelos matemáticos adaptables al problema que se analiza; conviene recordar que el experimento de Bayes es una analogía de un proceso de aprendizaje sobre un fenómeno a partir de una muestra.

Para entender este proceso de aprendizaje, se utiliza un modelo de urnas y bolas que representa el estado actual de información sobre la posición del saco rojo y el modo en que la muestra permite aprender. La dinámica propuesta es la llamada urna de Pólya.

Supongamos que es razonable aprender sobre la localización vertical y la horizontal del saco rojo por separada, sin pérdida de información. Esto equivale a dividir la mesa en cuatro cuadrantes con origen en el saco rojo. El modelo matemático que subyace a este razonamiento considera las direcciones horizontal y vertical como dos variables independientes. Por ejemplo, en la muestra simulada, se observa que los lanzamientos posteriores han caído una vez a la derecha del saco rojo y cuatro

veces a la izquierda, así como dos veces arriba y tres veces abajo, sin necesidad de conocer los pares respectivos. De esta manera, el estado de información del tirador puede representarse mediante un par de urnas: una que contiene bolas marcadas con izquierda (I) o derecha (D), y otra con bolas marcadas con arriba (+) o abajo (-).

La configuración inicial de estas urnas mentales, que representa una ausencia completa de información sobre la posición del saco rojo, debe indicar que estos cuadrantes son igualmente probables; o sea, que cada tipo de bola aparece en igual cantidad, como en la figura 5.2a, donde se representan urnas con una bola de cada tipo: (1 I, 1 D) y (1 +, 1 -).

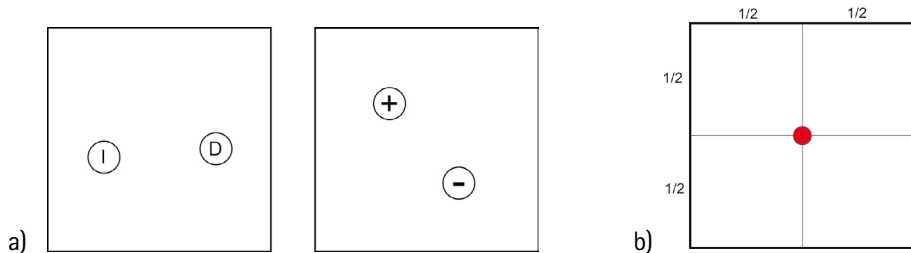


Figura 5.2. Situación inicial de ausencia total de información sobre la localización del saco rojo: (a) la urna mental; (b) la mejor apuesta.

Esto ayuda a definir mejor la apuesta sobre la localización del saco rojo. Al inicio, como hay una bola de cada tipo en la urna que representa la información actual, se divide la mesa en dos partes iguales en el eje izquierda-derecha, y en dos partes iguales en el eje arriba-abajo. La mejor apuesta queda definida como la intersección de estas dos líneas, vertical y horizontal (Imagen 5.2b).

Al obtener la muestra de la tabla, la situación de información del tirador cambia y le permite formular una apuesta mejor que cuando no sabía nada. El problema aquí es saber cómo cambia esa apuesta de forma coherente con la teoría matemática, de manera que tenga sentido y contribuya al desarrollo de la intuición del profesorado en formación.

La urna de Pólya es una respuesta probabilística para este problema, que proporciona lo que se denomina la probabilidad predictiva del suceso en cuestión. Por ejemplo, si cuatro veces los sacos negros han caído a la izquierda del saco rojo, esto lleva a intuir que, en un nuevo lanzamiento, sería más probable que el saco cayera nuevamente a la izquierda y, por lo tanto, el saco rojo se situaría a la derecha del plano. La urna de Pólya cuantifica esta probabilidad con la siguiente dinámica: cada resultado de la muestra se traduce añadiendo una bola del mismo tipo en la urna mental. Así, con la muestra obtenida en el ejemplo, las urnas mentales sobre la probabilidad de cada dirección quedan (5 I, 2 D) y (3+, 4-), como en la figura 5.3a.

Al actualizar la urna con la muestra, se obtienen 5 bolas a favor de izquierda y 2 a favor de derecha. Esto permite dividir la mesa mediante una línea vertical que respete la proporción de 2 a 5. Del mismo modo, con 3 bolas arriba y 4 abajo, se divide la mesa con una línea horizontal en la proporción de 4 a 3. La intersección de estas

dos líneas es la mejor apuesta para la localización del saco rojo con la información obtenida al lanzar los 5 sacos negros (figura 5.3b).

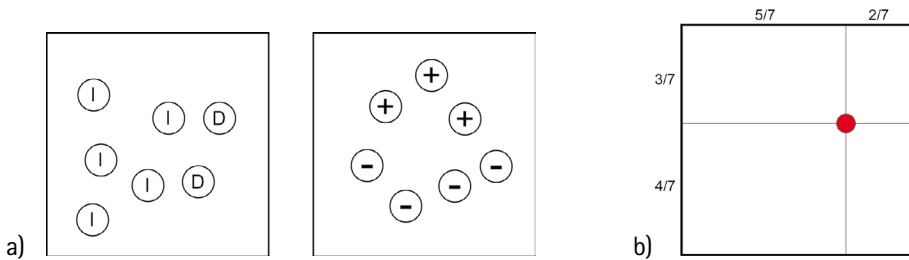


Figura 5.3. Situación de la información sobre la localización del saco rojo tras obtener la muestra, suponiendo independencia entre las direcciones vertical y horizontal: (a) urnas mentales sobre cada dirección; (b) la mejor apuesta.

Objetivos específicos

- ▶ Desarrollar conocimiento matemático sobre inferencia estadística informal: representación y análisis de una muestra, descripción del proceso inferencial e incertidumbre de dicha inferencia (De Vetten *et al.*, 2019).
- ▶ Aprender a estimar usando la información disponible en cada momento, y discutir criterios de optimalidad (más probable, mayor promedio, menor pérdida, etc.).
- ▶ Reflexionar sobre los procesos matemáticos empleados para tomar decisiones a partir de la información disponible.

Orientaciones didácticas

Se sugiere que quien dirige la formación modere la discusión, guíe la actividad, señale aspectos importantes, recoja la información y oriente las reflexiones de los distintos equipos. El objetivo es alcanzar las metas planteadas y desarrollar los conocimientos especializados propuestos de manera constructiva mediante la reflexión colectiva.

Referencias

De Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R. y Van Oers, B. (2019). Pre-service primary school teachers' knowledge of informal statistical inference. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22, 639-661. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9403-9>

The Royal Institution (26 de agosto de 2015). *Bayesian Statistics with Hannah Fry* [vídeo]. YouTube. <https://youtu.be/7GgLSnQ48os>

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 5.2. Conocimiento matemático y didáctico del contenido asociado a la tarea «Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades		
			1	2	
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	Procedimientos	Saber cómo se obtiene la probabilidad predictiva a partir de los resultados de una muestra.	X	X	
		Localización, a través de coordenadas adecuadas, de puntos en el plano.	X		
	KoT	Fenomenología	Reconocer el uso de la probabilidad como medida de información parcial.	X	
			Reconocer situaciones probabilísticas ligadas a la toma de decisiones.	X	X
	Registros de representación	Interpretación matemática de la información verbal en la recogida de datos para la inferencia.	X		
		Correspondencia entre registro verbal y gráfico en la representación de puntos en el plano.	X		
KPM	La práctica de demostrar	Medida de la incertidumbre como forma de validación del conocimiento derivado de una muestra.	X	X	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KMT	Potencialidades y limitaciones del experimento de Bayes como actividad para la enseñanza del razonamiento inferencial.	X		
		Variantes de la tarea para la etapa de Educación Primaria.	X		

Hojas de trabajo

Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción

ACTIVIDAD 1. Replicamos el experimento de Bayes

En esta actividad trabajaréis en equipos de cuatro a seis personas.

Asignad, en vuestro equipo de trabajo, quién jugará como tirador, y quién, como observador (los roles se intercambiarán al acabar el juego). Cada participante debe completar su hoja respectiva. Al finalizar cada ronda de cinco tiradas, haced una foto de la mesa para registrar los datos.

Una vez completadas las hoja de tirador y observador, y habiendo pasado todos los integrantes del equipo por ambos roles, decidid entre todos quién ha hecho la mejor apuesta y por qué.

Hoja del tirador (anverso)

Equipo: _____

Nombre del tirador: _____

Debes ponerte de espaldas a la mesa antes de que el observador coloque el saco rojo, y no debes mirar la mesa hasta que haya finalizado la actividad.

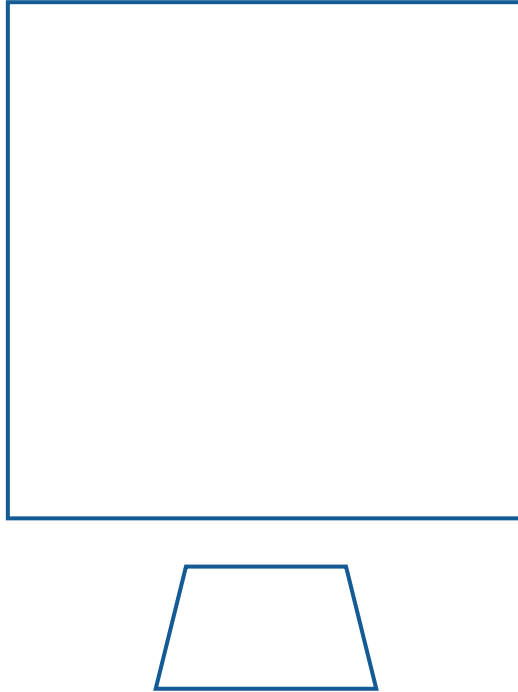
1.1 Antes de hacer ningún lanzamiento, ¿dónde crees que está situado el saco rojo?
¿Por qué lo crees?

1.2 Anota, de la forma que consideres, la información que te proporcione el observador en cada tirada.

1.3 Una vez completados tus lanzamientos, ¿cambiarías tu apuesta sobre la posición del saco rojo? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cómo la cambiarías?

Hoja del tirador (reverso)

1.4 Dibuja un punto donde creas que está situado el saco rojo (el cuadrado representa la mesa, y el trapecio, la posición del tirador).



1.5. Justifica por qué crees que el saco rojo está en esa posición.

Hoja del observador

Equipo: _____

Nombre del observador: _____

Cuando el tirador esté de espaldas a la mesa, coloca el saco rojo en algún lugar de ella, según tu criterio. A continuación, tras cada tirada, indica al tirador cómo ha quedado su lanzamiento respecto del saco rojo: a su izquierda o a su derecha; más arriba o más abajo.

Anota, de la forma que consideres, la información que vayas proporcionando al tirador en cada tirada.

Hoja de reflexión grupal

Equipo: _____

Por parejas de juego, y posteriormente en pequeño grupo, reflexionad sobre las siguientes cuestiones:

- 1.6. Cuando habéis jugado como tiradores, ¿cómo habéis registrado la información que os daba el observador?

- 1.7. ¿De qué manera os ha ayudado a cada uno la forma de registro usada para hacer la predicción?

- 1.8. ¿Cambiaron vuestras predicciones iniciales después de realizar el experimento?
¿Por qué sí o por qué no?

- 1.9. ¿Qué razonamientos o procedimientos matemáticos habéis usado como tiradores para decidir dónde estaba el saco rojo después de realizar el experimento?

- 1.10. ¿Creéis que se pueden trabajar contenidos curriculares de probabilidad con esta actividad? En caso afirmativo, ¿cuáles y en qué partes de la actividad?

- 1.11. ¿Usaríais esta actividad en el aula de Primaria? En caso afirmativo, explicad brevemente cómo lo haríais.

ACTIVIDAD 2. Consensuamos una predicción

En esta actividad trabajaréis en equipos de cuatro a seis personas.

Equipo: _____

Nombres: _____

Suponed que, al realizar los cinco lanzamientos para obtener información, los sacos quedaron dos veces a la izquierda/arriba, dos veces a la izquierda/abajo, y una vez a la derecha/abajo respecto del saco rojo, como se representa en la tabla 5.3. Discutid en pequeño grupo cuál sería vuestra predicción sobre la posición del saco rojo.

Tabla 5.3. Supuesto resultado del experimento.

	Izquierda	Derecha	Total
Arriba	2	0	2
Abajo	2	1	3
Total	4	1	5

6. El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo

Ángeles Chico-Gómez

<https://orcid.org/0000-0001-8514-3008>

Universidad de Huelva (España)

Nuria Climent

<https://orcid.org/0000-0002-0064-1452>

Universidad de Huelva (España)

Inmaculada Gómez

<https://orcid.org/0000-0002-0843-5784>

Universidad de Huelva (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria

Duración aproximada de la aplicación: 2 horas

Fundamentación

Abordar problemas de generalización en el aula de Primaria, entendidos como el descubrimiento de regularidades que se observan dentro de un conjunto de casos (Callejo y Zapatera, 2017), supone una aproximación al desarrollo del álgebra temprana en el alumnado de esta etapa. El proceso de generalizar puede nutrirse de heurísticos como utilizar una tabla o buscar un patrón, que funcionan como recursos de organización y visualización de la información, lo que favorece el tratamiento de los datos (Novotná *et al.*, 2014). Estos heurísticos también pueden ayudar a simplificar y revisar el propio proceso de resolución (Delisio *et al.*, 2018).

El término *heurístico* fue acuñado por Pólya (1945) y refinado por Schoenfeld (1985) para designar una guía o estrategia asociada a cada paso de la resolución, que ayuda a comprender un problema y a ordenar eficientemente los recursos para resolverlo (Carrillo, 1998). El empleo de heurísticos pone de relieve el papel de la experiencia y las habilidades de quien se enfrenta al problema (Marchi, 1980). Las decisiones que toma el resolutor van desarrollando su habilidad para afrontar la tarea (Schoenfeld, 2010), de forma que los heurísticos se integran como herramientas que permiten abordar la resolución desde nuevos enfoques (Novotná *et al.*, 2014).

Por otra parte, afortunadamente, cada vez es más común que el profesorado en formación se encuentre con aulas inclusivas en las que se favorece la integración de distintos tipos de alumnado. Entre la diversidad del aula de Primaria se encuentra, por ejemplo, alumnado con síndrome de Asperger, incluido en el trastorno del espectro autista (TEA). Este alumnado suele mostrar habilidades para focalizarse en los detalles (De Giambattista *et al.*, 2019), característica que resulta muy útil para detectar regularidades y que se complementa con una tendencia al pensamiento visual, lo cual facilita el descubrimiento de patrones en un dibujo al abordar un problema de generalización. Sin embargo, puede mostrar dificultades de comprensión verbal, lo que puede derivar en errores de interpretación de enunciados y claves verbales (Bae *et al.*, 2015). Además, las limitaciones asociadas a las funciones ejecutivas (Ozonoff y Schetter, 2007) —como, por ejemplo, la planificación, la organización, la predicción, la memoria de trabajo o la autorregulación—, junto con dificultades de atención, se traducen en que el alumnado suele saltarse pasos en la resolución, olvidar el objetivo del problema o incluso las propias estrategias (Klaren *et al.*, 2017).

La investigación ha mostrado que proporcionar a este alumnado apoyo e instrucción basados en la estructuración del proceso de resolución y en la representación favorece su éxito en la resolución de problemas de generalización (Root *et al.*, 2021). Por ello, el profesorado en formación requiere un conocimiento especializado en recursos y estrategias didácticas que faciliten el proceso de resolución de problemas del alumnado. El empleo de diferentes registros, como la representación verbal, la simbólica, los gestos, los movimientos o los dibujos (Chico *et al.*, 2023), puede contribuir al desarrollo del lenguaje algebraico de todo el alumnado, en consonancia con los principios de participación, implicación y representación del diseño universal de aprendizaje (en adelante, DUA) (Rose y Gravel, 2010). Por otro lado, organizar el proceso de resolución del alumnado en distintas fases, como las de Pólya (1945), puede ayudar a estructurar la aplicación de estrategias de generalización (Chico *et al.*, 2022).

Objetivos generales

Se busca que el profesorado en formación:

- ▶ Resuelva un problema de generalización y plantee distintas estrategias para abordarlo.
- ▶ Reflexione sobre las posibles dificultades del alumnado de Educación Primaria al resolver el problema.
- ▶ Conozca algunas estrategias de enseñanza inclusiva para atender dichas dificultades, basadas en el uso de material manipulativo y en la secuenciación del enunciado.
- ▶ Examine las estrategias de resolución empleadas por el alumnado con síndrome de Asperger (TEA) y profundice en las características que pueden influir en el proceso de resolución.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar esta tarea, el profesorado en formación debería tener conocimientos básicos sobre la resolución de problemas de generalización, el heurístico «buscar un patrón» y el uso de tablas en la resolución de problemas.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Esta tarea formativa hace uso de procesos de resolución de un problema desarrollados por el alumnado con síndrome de Asperger, a quienes se les facilitó el uso de material manipulativo. Se considera conveniente discutir primero con el profesorado en formación las distintas estrategias de resolución posibles para profundizar después en las estrategias empleadas por el alumnado en sus producciones. Se busca también que el profesorado en formación reflexione sobre el posible uso de materiales de apoyo en la resolución del problema y sobre su papel en una enseñanza inclusiva de las matemáticas, puesto que estos materiales pueden favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en la diversidad de alumnado.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Organizadores gráficos y pictogramas de escaleras de distintas alturas (anexo 1).

- ▶ Cuadrados de goma EVA de dos centímetros de lado para la construcción de los términos de la secuencia.

Actividad 1. Resolución del problema de la arqueóloga

Descripción

Se propone al profesorado en formación la primera parte de la tarea como actividad previa a la sesión: resolver el problema de la arqueóloga aplicando tantas estrategias distintas como sea posible (al menos dos, correspondientes a los apartados 1.1 y 1.2 de la tarea).

La sesión comienza con una discusión de las estrategias que el profesorado en formación ha trabajado individualmente. Durante la puesta en común, quien dirige la formación propone a algunos miembros del grupo que compartan sus resoluciones, procurando que el planteamiento de estas vaya de menor a mayor demanda cognitiva y que se mencionen diferentes registros de representación (pictórico, numérico y algebraico). La actividad invita al profesorado en formación a observar la resolución del problema desde distintas perspectivas y a vincular distintos registros. Esta visión más amplia del problema puede favorecer la detección de las dificultades que han experimentado como resolutores del problema, las cuales pueden vincularse a las que pueda mostrar el alumnado de Educación Primaria.

Esta reflexión, con una guía más o menos cerrada en función del planteamiento del profesorado en formación, pretende desembocar en la cuestión de cómo podría abordarse el problema de la arqueóloga con alumnado de tercer ciclo de Primaria. La discusión debe subrayar la importancia de la comprensión del problema y el papel de la representación. En este sentido, se presentan ejemplos de materiales diseñados para facilitar ambos aspectos: las piezas de goma EVA, los pictogramas y los organizadores gráficos disponibles en el anexo 1 (véase la figura 6.1). A partir de ellos, se reflexiona sobre el posible uso del material manipulativo y de los organizadores para afrontar las dificultades comentadas.



Figura 6.1. Material manipulativo (piezas de goma EVA), pictogramas y organizadores gráficos.

Objetivos específicos

- ▶ Resolver un problema de generalización utilizando diferentes estrategias propias de Educación Primaria.
- ▶ Analizar las posibles dificultades vinculadas a la resolución del problema.
- ▶ Examinar las posibilidades del enunciado, su potencialidad y sus posibles variantes.

Orientaciones didácticas

De manera general, se propone a quien dirige la formación que trabaje toda la tarea en pequeños equipos como primera aproximación a las actividades, para luego proceder con las discusiones en plenaria que permitan consensuar las conclusiones de cada actividad.

Con el profesorado en formación pueden discutirse posibles dificultades y mejoras del enunciado del problema, abordando cuestiones como: ¿por qué solo se da la altura de un cajón si tiene tres dimensiones?, ¿necesitamos que los cajones sean del tamaño del dinosaurio o menores? (considerando, por ejemplo, la altura de la arqueóloga y cómo o con qué limpia el fósil).

Se sugiere que quien dirige la formación modere la discusión, guíe la actividad y señale aspectos importantes sobre el problema que se analiza y el material empleado. Además, se espera que oriente las reflexiones de los distintos equipos sobre las estrategias de resolución, con el fin de alcanzar los objetivos planteados y desarrollar los conocimientos especializados propuestos de manera constructiva a través de la reflexión colectiva.

Actividad 2. La resolución de Raúl

Descripción

La consigna general de la actividad es: «Observad e interpretad la resolución de Raúl al abordar el problema de la arqueóloga, atendiendo a las distintas situaciones que se plantean».

Para la lectura y reflexión debe aclararse que las tres situaciones corresponden a la resolución de un único alumno de Primaria, Raúl, y siguen el orden propuesto. A continuación, se ofrecen algunas aclaraciones sobre cada situación, destinadas a quien dirige la formación, con el fin de facilitar su comprensión y su potencial como objeto de reflexión del profesorado en formación.

Situación 2.1. Resolución de términos cercanos y consecutivos apoyados en el dibujo

Raúl cuenta los cajones sobre el dibujo y añade otros nuevos en forma de columna para responder a las cuestiones sobre el dinosaurio de dos y cuatro metros. Cuando debe enfrentarse al de ocho metros, aunque dibuja hasta la columna 7, cambia de estrategia al darse cuenta de que el número de cajones de cada escalón aumenta siempre en uno. Modifica no solo su manera de contar, sino también de dibujar: coloca únicamente un «cajón flotante» en cada nuevo escalón, que le sirve de guía para continuar la secuencia y sumar 8, 9 y 10 cajones en cada nueva columna. Este estudiante solía cometer muchos errores de cálculo por intentar realizar las operaciones rápidamente: olvidaba llevadas o escribía cifras erróneas. Mientras aplicaba la estrategia de «cajones flotantes», al volver atrás (a los primeros términos), por haber cometido errores al sumar mentalmente, descubre que los resultados de su estrategia de conteo inicial también contenían algunos errores.

Situación 2.2. Resolución de términos cercanos y consecutivos buscando una relación funcional

Tras trabajar con el dibujo, se le proporciona a Raúl el organizador gráfico. El estudiante comienza a anotar los datos que ha obtenido previamente, algunos de ellos erróneos (olvida que los había corregido, vuelve al dibujo y comete errores de conteo). Tras completar cinco filas con los datos que ha observado, la docente le pregunta si ha descubierto algo (Raúl no explica lo que hace, solo escribe en silencio). Entonces dibuja unas flechas que relacionan verticalmente los datos y parece descubrir un patrón, aunque erróneo: de una escalera a otra se suma 4, 6, luego 8... Continúa sin verificar con el dibujo, los pictogramas o la goma EVA. La docente le pide que explique qué está escribiendo, y es en ese momento cuando Raúl advierte el error: la repetición del número 8, en lugar del esperable 10, lo cual rompe la supuesta regularidad. Revisa entonces sus datos y descubre los errores que ha cometido al contar y sumar.

Situación 2.3. Generalización a términos lejanos y no consecutivos

Una vez corregidos los datos del organizador y las relaciones observadas (reflejadas con las flechas verticales), se le plantea a Raúl averiguar la cantidad de cajones para alcanzar el dinosaurio de 20 metros. Se le propone que, a falta de espacio, coloque juntos dos organizadores. El estudiante, en la fila siguiente al 10, anota los datos del 20 en la columna correspondiente a «altura» y añade la flecha vertical «20». De este modo, sigue la regularidad sin tener en cuenta que son términos no consecutivos y que se han omitido los valores del 11 al 19.

Se pide al profesorado en formación que reflexione sobre el proceso de resolución de Raúl. Los equipos deben discutir el papel de la representación en dicha resolución, las dificultades que el alumno evidencia y la posible influencia del material en cada una de sus estrategias. Para ello, se les proporciona un guion con preguntas que pretenden orientar la reflexión (preguntas 2.3.1 a 2.3.5).

La progresión de las preguntas establece un orden de reflexión, aunque hay cuestiones que, con la orientación de quien dirige la formación, deben ser abordadas de manera transversal, como:

- ▶ Los tipos de representación en las tres fases de resolución del estudiante: pictórica (en la situación 2.1) y tabular (en las situaciones 2.2 y 2.3).
- ▶ El potencial del organizador tabular (situaciones 2.2 y 2.3) frente al uso del dibujo (situación 2.1): plantear los datos en forma de tabla propicia un orden y una planificación que no solo ayudan al alumno a superar dificultades vinculadas a la memoria de trabajo y el cálculo mental evidenciadas en la situación 2.1, sino que además favorecen el descubrimiento de regularidades (situaciones 2.2 y 2.3).
- ▶ Los errores que comete el alumno: errores de conteo y cálculo mental, favorecidos por no disponer de un registro; falta de inhibición y autorregulación de su propio proceso, lo que le lleva a inventar un patrón en la situación 2.2 sin revisar los errores cometidos al sumar cajones, y dificultades al trabajar con términos no consecutivos en la situación 2.3, aspecto en el que puede influir el organizador.

Objetivos específicos

- ▶ Leer y comprender las tres etapas de resolución de Raúl, y reflexionar sobre las estrategias que desarrolla el estudiante al abordar el problema de la arqueóloga.
- ▶ Discutir las estrategias de generalización.
- ▶ Analizar el papel de la representación en la resolución del alumno.
- ▶ Examinar el papel del material (organizador gráfico) en la resolución del problema.

Orientaciones didácticas

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos y con el modelo de puesta en común en plenaria para comparar distintas reflexiones y contrastar respuestas.

En esta actividad, quien dirige la formación se centra en reformular las cuestiones para que los grupos aporten sus reflexiones, y plantea preguntas que guíen la discusión y generen cuestiones transversales (propuestas en el apartado de descripción).

Se recomienda trabajar primero sobre las situaciones 2.1, 2.2 y 2.3, ya que las tres reconstruyen las fases del proceso de resolución del problema de un único alumno, Raúl, desde la comprensión hasta la revisión del propio proceso.

En la primera parte de esta actividad, quien dirige la formación se centra en aclarar posibles cuestiones sobre la resolución de Raúl, procurando ofrecer pautas descriptivas y no analíticas de cada una de las tres situaciones. Para ello, puede apoyarse en la descripción de la situación que se le ha proporcionado. Conviene dejar margen para que el profesorado en formación reflexione sobre el proceso de resolución; la guía descriptiva persigue que, si hay dudas sobre lo que Raúl ha dibujado o escrito, se puedan aclarar sin adelantar el análisis. Durante la puesta en

común, a la hora de propiciar que el profesorado en formación reflexione sobre las diferencias entre usar el material para representar y usarlo para resolver el problema, quien dirige la formación puede plantear la importancia de utilizar diversas formas de representación con el objetivo de promover distintas formas de pensamiento en el alumnado, lo cual sienta las bases para una discusión posterior sobre el DUA.

Actividad 3. La resolución de Noa

Descripción

Tras discutir la resolución de Raúl, se plantea el caso de Noa, un niño de quinto de Primaria. Se entrega al profesorado en formación un nuevo guion que incluye la descripción de la situación de Noa y unas cuestiones para la reflexión.

Situación 3.1. La resolución del dinosaurio de 30 metros

Noa es otro estudiante de Primaria que resolvió el problema de la arqueóloga utilizando el organizador gráfico y los pictogramas. Tras responder las cuestiones planteadas en el enunciado, se le propone, al igual que a Raúl, averiguar los cajones necesarios para alcanzar un dinosaurio de 20 metros de altura. Su propuesta consiste en sumar los números consecutivos a 55 (escalera de diez metros de altura) hasta llegar a 20. Es entonces cuando, motivado, decide calcular los cajones para el dinosaurio de 30 metros. En esta situación se observa cómo el estudiante intenta emplear una estrategia mucho más rápida que la operación aditiva anterior (que implicaba tantos sumandos): 210×30 . Es habitual que el alumnado recurra a la multiplicación como medio para «acelerar» una suma de elementos, por lo que cabe esperar reflexiones de este tipo entre el profesorado en formación. Sin embargo, resultaría interesante discutir el error del alumno y el origen de los factores que emplea. Puede abordarse en este punto la concepción de la multiplicación que evidencia el estudiante, quien sustituye una suma de números consecutivos por multiplicar su último resultado, 210 (correspondiente a la escalera de veinte metros), por 30.

Se observan además atisbos de falta de inhibición, favorecidos por las ganas de terminar y por la propia motivación del alumno, que no analiza su propuesta y opta por volver a la suma cuando se le pregunta por el porqué de la multiplicación.

Objetivos específicos

- ▶ Visualizar una estrategia de generalización de un estudiante de quinto de Primaria al abordar el problema de la arqueóloga.
- ▶ Identificar dificultades específicas en el proceso de generalización.

Orientaciones didácticas

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos y con el modelo de puesta en común en plenaria para comparar distintas reflexiones y contrastar respuestas.

De nuevo, quien dirige la formación se centra en guiar la discusión y orientar la reflexión hacia la comparación de estrategias y las distintas formas de pensamiento al afrontar un problema de generalización.

La situación 3.1, que presenta el proceso de resolución de Noa, se introduce tras completar la actividad 2 con el fin de establecer comparaciones sobre estrategias y formas de pensamiento de dos alumnos de la misma edad que afrontan un mismo problema.

Actividad 4. La enseñanza inclusiva de la resolución de problemas

Descripción

En esta actividad se introducen cuestiones relativas al TEA. La discusión final puede ser el momento más recomendable para comentar el diagnóstico de estos alumnos, ya que permite mostrar que algunas de las dificultades que manifiestan (como el déficit de atención en la tarea, la desorganización o los errores de cálculo) son características que puede presentar cualquier alumno del aula. También es el momento adecuado para resaltar sus habilidades de visualización y las posibilidades de los recursos y las diferentes representaciones en Educación Primaria.

Tras finalizar las actividades de reflexión sobre las situaciones de Noa y Raúl, se comenta con el profesorado en formación que ambos estudiantes presentan necesidades específicas derivadas del TEA, entre cuyas características destacan, por un lado, su habilidad para percibir los detalles y un alto grado de pensamiento visual, y, por otro, dificultades en la comunicación verbal, la planificación, la atención conjunta y la autorregulación, así como cierta rigidez mental. Se proporciona al profesorado en formación un esquema con la descripción de los rasgos que la investigación vincula al TEA (véase la lectura complementaria de Darretxe y Sepúlveda, 2011).

Se plantea entonces una discusión sobre esta necesidad educativa especial en relación con el problema de la arqueóloga, y se establecen algunas hipótesis mediante las actividades 1, 2, 3 y 4 de la tarea.

Son varios los aspectos asociados al TEA que el alumnado puede evidenciar. A continuación se recogen algunos ejemplos relacionados con el problema de la arqueóloga:

- ▶ Situación 2.1: dificultades de planificación y organización (no anota el conteo, solo el resultado, lo que genera errores); pensamiento visual (el dibujo parece ayudarlo a comprender la situación, y esquematizar pictóricamente los escalones lo lleva a descubrir una regularidad).
- ▶ Situación 2.2: dificultades de organización y planificación (utilizar la tabla favorece el registro de los datos y la visualización de las relaciones entre ellos); habilidades de detección de regularidades (halla un patrón); dificultades de memoria de trabajo (olvida de dónde obtiene los números); dificultades de autorregulación (no revisa sus datos).
- ▶ Situación 2.3: pensamiento visual (la tabla favorece su proceso de generalización y organización de los datos); dificultades de memoria de trabajo (olvida su estrategia y suma 20 directamente).
- ▶ Situación 3.1: falta de inhibición (plantea ideas sin pensar); dificultades de autorregulación (no revisa su propuesta); dificultades de organización (realiza el cálculo desordenando los sumandos).

Aunque no se profundice en estas características, es recomendable resaltar cómo ofrecer la posibilidad de usar los materiales favorece la aparición de distintos registros y deja espacio a diferentes formas de pensamiento en el alumnado (dibujo, flechas esquemáticas, representación tabular o ausencia de material).

Es interesante discutir con el profesorado en formación si el hecho de saber que Noa y Raúl presentaban necesidades educativas especiales modifica en algo su reflexión sobre las cuestiones planteadas en las actividades 2 y 3 (tipos de representación, potencial o limitaciones de los materiales, registros en la resolución de problemas, etc.). Se aborda así la cuestión de la educación inclusiva y cómo el uso de materiales o de diferentes formas de presentación puede favorecer el desarrollo de las habilidades de todo el alumnado como resolutores de problemas, sin segregar en función de sus características.

Objetivos específicos

- ▶ Analizar la propuesta del problema de la arqueóloga desde la atención a la diversidad (uso del material, secuenciación del enunciado y de las preguntas) y compararla con otros problemas análogos.
- ▶ Examinar las estrategias de resolución manifestadas por alumnado con síndrome de Asperger (TEA) en un taller sobre el problema de la arqueóloga, y profundizar en las características que pueden influir en el proceso de resolución.

Orientaciones didácticas

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos y con el modelo de puesta en común en plenaria para comparar distintas reflexiones y contrastar respuestas.

Quien dirige la formación se centra en describir algunas características del TEA y en orientar la discusión y reflexión del profesorado en formación.

Se introducen cuestiones relativas al TEA y se aborda la resolución de problemas desde una perspectiva inclusiva.

Referencias

- Bae, Y. S., Chiang, H. M. y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 45(7), 2200-2208. <https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8>
- Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 309-333. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1>
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva.
- Chico, A., Climent, N., Gómez-Hurtado, I. y Polo-Blanco, I. (2023). Resolución de un problema de generalización por un alumno de 5.º de primaria con síndrome de Asperger. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Baddillo y P. Ivars (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 195-202). SEIEM.
- Chico, A., Gómez-Hurtado, I. y Climent, N. (2022). Problem-solving by students with Asperger's Syndrome. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1-8). Free University of Bozen-Bolzano; ERME.
- Darretxe, L. y Sepúlveda, L. (2011). Estrategias educativas para orientar las necesidades educativas de los estudiantes con síndrome de Asperger en aulas ordinarias. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 9(2), 869-892.
- De Giambattista, C., Ventura, P., Trerotoli, P., Margari, M., Palumbi, R. y Margari, L. (2019). Subtyping the autism spectrum disorder: Comparison of children with high functioning autism and Asperger syndrome. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 49(1), 138-150. <https://doi.org/10.1007/s10803-018-3689-4>
- Delisio, L., Bukaty, C. y Taylor, M. (2018). Effects of a graphic organizer intervention package on the mathematics word problem solving abilities of students with autism spectrum disorders. *The Journal of Special Education Apprenticeship*, 7(2), artículo 4. <https://scholarworks.lib.csusb.edu/josea/vol7/iss2/4/>

- Klaren, M., Pepin, B. y Thurlings, M. (2017). Autism and mathematics education. En A. Bikner-Ahsbahs, M. Haspekian, A. Bakker y M. Maracci (eds.), *Proceedings of the CERME 10* (pp. 629-636). CERME.
- Marchi, P. (1980). Can heuristic be taught? A review essay on *Infinitesimal Calculus* by James M. Henle and Eugene M. Kleinberg. *For the Learning of Mathematics*, 1(2), 35-42. <http://www.jstor.org/stable/40247714>
- Novotná, J., Eisenmann, P., Příbyl, J., Ondrušová, J. y Břehovský, J. (2014). Problem solving in school mathematics based on heuristic strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 7(1), 1-6. <https://doi.org/10.7160/eriesj.2014.070101>
- Ozonoff, S. y Schetter, P. L. (2007). Executive dysfunction in autism spectrum disorders: From research to practice. En L. Meltzer (ed.), *Executive function in education: From theory to practice* (pp. 287-308). Guilford.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Root, J. R., Ingelin, B. y Cox, S. K. (2021). Teaching mathematical word problem solving to students with autism spectrum disorder: A best-evidence synthesis. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 56(4), 420-436.
- Rose, D. H. y Gravel, J. W. (2010). Universal design for learning. En *International encyclopedia of education* (3.^a ed., pp. 119-124). Elsevier.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. (2010). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 6.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades			
			1	2	3	4
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Conocer estrategias de resolución de problemas de generalización (como la observación de la regularidad en la diferencia entre términos o estrategias visuales como completar la figura geométrica correspondiente).	X			
		Reconocer la estrategia de descubrimiento de patrones geométricos.	X			
	Registros de representación	Reconocer el uso de tablas de doble entrada para la observación de regularidades.	X			
KPM	La práctica de resolver problemas	Conocer las fases y heurísticos que pueden estar presentes en la resolución de problemas.	X	X		

Tabla 6.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
			1	2	3	4	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Conocer las estrategias de resolución de problemas de generalización del alumnado de Primaria (de conteo, recursivas...) y el uso de representaciones.	X	X			
		Conocer diferentes estrategias de generalización en términos cercanos y lejanos.			X		
		Conocer estrategias de resolución de problemas de generalización del alumnado de Primaria con síndrome de Asperger (TEA).				X	
	Fortalezas y debilidades	Reconocer habilidades y obstáculos del alumnado en el proceso de generalización, como registrar, organizar y relacionar los datos, realizar cálculos o buscar regularidades gráfica y aritméticamente.		X			
		Reconocer dificultades relacionadas con las operaciones multiplicativas y con la comprensión del problema y de la propia estrategia de resolución; habilidades de visualización y cálculo.			X	X	
	KMT	Teorías de enseñanza de las matemáticas	Conocer el diseño universal de aprendizaje (DUA) como metodología de enseñanza.	X	X	X	
		Recursos didácticos	Reconocer el uso del dibujo y del organizador tabular para resolver problemas de generalización, así como sus potencialidades y limitaciones.	X	X	X	
			Reconocer la secuenciación del enunciado de un problema como medio para facilitar su comprensión y resolución al alumnado con dificultades.				X

Hojas de trabajo

El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo

ACTIVIDAD 1. Resolución individual del problema de la Arqueóloga

En esta actividad, cada profesor en formación resuelve el problema de manera individual (apartados 1.1 y 1.2). El objetivo es reunir, al compartir después con el resto del equipo, la mayor variedad posible de estrategias de resolución. Los apartados 1.3 y 1.4 se trabajan en grupos de dos a cuatro personas.

Una arqueóloga necesita limpiar las figuras de los dinosaurios que se exponen en el museo. No dispone de una escalera, pero ha encontrado cajones de madera del mismo tamaño que puede apilar para subir (véase la figura 6.2).

Cada cajón mide un metro de altura.



Figura 6.2. Forma en que se apilan los cajones.

¿Cuántos cajones necesita para alcanzar la altura del *Velociraptor* (2 m)?

¿Y para alcanzar la del estegosaurio (4 m)? ¿Y la del *Gigantoraptor* (8 m)?

¿Y la del *Tyrannosaurus rex* (10 m)?

1.1 ¿Cómo resolverías el problema? Detalla tu estrategia de resolución.

1.2 ¿Podrías resolverlo de otro modo? Describe otra estrategia de resolución diferente a la anterior.

1.3 ¿Tuvisteis alguna dificultad para resolver el problema?

1.4 ¿Creéis que el alumnado de tercer ciclo de Primaria podría resolver el problema? ¿Qué dificultades podría encontrar para abordarlo?

Actividad 2. La resolución de Raúl

Observa e interpreta la resolución de Raúl al abordar el problema de la arqueóloga, atendiendo a las situaciones 2.1, 2.2 y 2.3.

Situación 2.1. Resolución de términos cercanos y consecutivos apoyados en el dibujo

Raúl comienza a resolver el problema de manera autónoma: cuenta los cajones en el dibujo del enunciado, que va ampliando con nuevas columnas de cajones. Cuando se le pregunta por su estrategia, habla de «apilar las cajas». Para resolver el caso del *Gigantoraptor* (8 m), decide cambiar de estrategia: representa solamente los cajones superiores de cada columna (figura 6.3). Esta nueva estrategia le permite detectar algunos errores que había cometido en el conteo previo, de manera que los corrige.



Figura 6.3. Escalones flotantes de Raúl

Profesora (P): Oye, ¿qué altura te piden? ¿8? ¿Esto es de 8? (Señala el dibujo de la escalera de Raúl).

Raúl (R): (Se queda quieto mirando el dibujo y enseguida cuenta una columna más). ¡Ah, 20!

P: Vale. ¿Por qué serían 20?

R: Porque, si tengo que subir 8 metros, 1, 2, 3, 4, 5... (Cuenta señalando solo los cajones superiores de cada columna. Se detiene).

P: Es más, ¿no?

R: Sí, 3 más... más los de abajo. (Añade cajones superiores hasta alcanzar los 8 de altura y cuenta los cajones totales).

Situación 2.2. Resolución de términos cercanos y consecutivos buscando una relación funcional

Se reta a Raúl a averiguar cuántos cajones necesitaría la arqueóloga para alcanzar un dinosaurio de 20 metros (tras preguntarle por algunos ejemplos de especies, ya que le encantan). Para ello, se le proporciona el organizador. Tras unos instantes de silencio, se le repite la pregunta, esta vez incidiendo en los ejemplos anteriores sobre los 4, 5 y 6 metros. Raúl vuelve a contar para completar el organizador, por lo que la profesora le sugiere encontrar una estrategia más rápida. «Saltar», contesta Raúl. Comienza a «saltar» utilizando el organizador y registra la información para cada nuevo escalón. Tras «saltar» hasta los 8 metros, Raúl comienza a dibujar flechas en el organizador (figura 6.4) para conectar verticalmente los números de cajones. Hasta ese momento había calculado todo de memoria, lo que le hacía olvidar los datos y cometer errores de cálculo.



Figura 6.4. Estrategia de las flechas.

ALTURA	NÚMERO DE CAJAS TOTALES
4	10
5	14
6	20
7	28
8	42

Figura 6.5. Representación de la estrategia de Raúl (figura 6.4).

P: De aquí a aquí (de 4 a 5 de altura), ¿cuánto aumenta?
(Raúl comienza a dibujar flechas que relacionan los datos verticalmente, y busca y anota la relación entre cada uno).

R: La de 8 son 42. (Se refiere a la escalera sobre la que le habían preguntado previamente).

P: ¿Seguro?

R: Creo que sí. 40 o algo así.

P: De aquí a aquí, ¿cuánto?

R: Va sumando de dos en dos. Creo que es 40.

P: ¿Por qué?

R: Porque entre el de 20 y el de 30 sería 40. Y $6 + 4...$

P: Pero estamos en el de 8, cuidado.

R: Sí... ah... A ver. El de 8 serían 36 cajones.

P: Vale. ¿Y el de 9? Lo podemos poner aquí abajo, aunque no haya celda.
(Raúl añade la flecha y escribe el resultado).

R: 40

P: ¿Por qué?

R: Porque habría que sumarle 4 a este. (Señala el de 8).

P: ¿Cuánto has sumado del de 7 al de 8?

R: 8. (Borra y se queda mirando su registro).

P: Aquí hay algo raro, porque va 4, 6, 8, 8.

R: Es que son 36, pero...

Situación 2.3. Generalización a términos lejanos y no consecutivos

Una vez respondidas todas las preguntas del enunciado, se le propone de nuevo el reto del dinosaurio de 20 metros. Raúl escribe «20» en la columna de altura y la correspondiente flecha con un «20» para calcular el término de la secuencia (figura 6.6).

Número de celdas	Altura
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
20	20

Figura 6.6. Secuencia de Raúl.

2.3.1. ¿Qué heurísticos se observan en la resolución de Raúl?

2.3.2. Describe la estrategia de Raúl para resolver los casos del *Gigantoraptor* y del dinosaurio de 20 metros (situaciones 2.1 y 2.2). Compara ambas estrategias e identifica similitudes y diferencias. ¿Qué papel desempeñan estas estrategias en la generalización?

2.3.3 Describe las diferentes formas de representación que emplea Raúl, así como sus potencialidades y limitaciones en el proceso de resolución del problema.

2.3.4 Valora cómo el organizador tabular puede influir en el proceso de resolución de Raúl (situaciones 2.2 y 2.3), en términos de potencialidades y limitaciones.

2.3.5 Observa la resolución de Raúl (situaciones 2.1, 2.2 y 2.3) e identifica las posibles fases de resolución de acuerdo con la teoría de Pólya.

ACTIVIDAD 3. La resolución de Noa

Situación 3.1. La resolución del dinosaurio de 30 metros

Tras recibir el mismo reto que Raúl, Noa se propone calcular cuántas cajas necesitaría la arqueóloga para alcanzar un dinosaurio de 30 metros («¡Vamos a hacerlo de cabeza!»). Para ello, consulta su organizador y realiza una suma de los números consecutivos con los que ya había trabajado, partiendo del 55 ($n = 10$): $55 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$. Obtiene 210 y lo multiplica por 30.

Noa (N): Voy a ponerme un reto... mmm. 20 metros.

Profesora (P): 20 metros. Si la arqueóloga tuviera que alcanzar al *Triceratops* y sus 20 metros, ¿cuántos cajones necesitaría?

N: Si estamos en 10 (*partimos de 10 metros*), necesitaría 10 cajones. Pero apilados para hacer la altura. Así que, de manera rápida, sería $55 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$. Y el 20 no lo pongo.

P: ¿Por qué?

N: Bueno, mejor lo pongo.

P: Pero ¿por qué lo pones? A ver, explícame.

N: Porque, si tenemos que llegar a los 20 metros, pues lo pongo, Y así se calcularía de forma rápida. (*Comienza a calcular de manera desordenada y se equivoca por la cantidad de sumandos en la operación*).

P: ¿Por qué no tachas los que vas diciendo?

(*Noa lo hace y calcula*).

N: 210 cajones. [...] ¿Y si fueran 30? Vamos a hacerlo mentalmente: 210×30 .

P: ¿Por qué por 30?

N: Porque así no tengo que poner todo este lío de numeritos.

P: Porque al final lo que tienes que sumar es $1 + 2 + 3 + 4...$

N: Por eso multiplico por 30, porque así estoy haciendo casi lo mismo. (*Ante la insistencia de la profesora en que lo explique, prefiere volver a la suma*).

3.1.1 ¿Qué heurísticos se observan en la resolución de Noa?

3.1.2 Describe la estrategia de Noa para afrontar el caso del dinosaurio de 20 m.

3.1.3 ¿Cómo justificas la operación 210×30 que plantea el estudiante? ¿Por qué crees que la plantea?

3.1.4 Compara las dos estrategias de Raúl y Noa al resolver el dinosaurio de 20 metros (situaciones 2.1 y 3.1) e identifica las similitudes y las diferencias. ¿Qué papel desempeñan estas estrategias en la generalización?

ACTIVIDAD 4. La enseñanza inclusiva de la resolución de problemas

Las resoluciones anteriores corresponden a alumnado con trastorno del espectro autista (TEA), nivel 1. La literatura describe algunas características del trastorno, como las que se recogen a continuación:

Tabla 6.3. Características del TEA descritas en la literatura.

Habilidades	Necesidades
Focalización en detalles	Dificultades para ver la globalidad de una figura.
Pensamiento original	Dificultad para la comprensión verbal
Trabajo independiente	Poca flexibilidad de pensamiento
Reconocimiento de patrones	Dificultades de atención sostenida
Visualización	Dificultades de organización y orden
Memoria visual y mecánica	Dificultades de memoria de trabajo
Perseverancia	Dificultades para predecir
Intereses marcados	Dificultades para autorregularse

4.1 Identifica evidencias de algunas características del TEA en las situaciones 2.1 a 2.3 y 3.1.


4.2 Identifica en las situaciones 2.1 y 2.2 cómo determinadas estrategias o recursos contribuyen al aprendizaje del alumnado con estas características.

4.3 Reflexiona sobre si estas estrategias pueden ser útiles para dar respuesta a las características de todo el alumnado.

ANEXO 1. Plantilla de organizador gráfico con ejemplos de pictogramas proporcionado al alumnado

Escalera de cajas

Altura 

Número de cajas 



7. Definición de polígono

Víctor J. Barrera-Castarnado

<https://orcid.org/0000-0002-2276-0129>

Universidad CEU Fernando III, CEU Universities (España)

M. Mar Liñán-García

<https://orcid.org/0000-0003-1328-3356>

Universidad de Sevilla (España)

M. Cinta Muñoz-Catalán

<https://orcid.org/0000-0003-2329-7612>

Universidad de Sevilla (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria

Duración aproximada de la implementación: 3 horas

Fundamentación

Los currículos para la formación de profesorado de áreas STEM (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas) se optimizan cuando permiten construir de forma sólida el conocimiento especializado que los futuros docentes necesitarán en su práctica (Hill *et al.*, 2020). Por otro lado, la perspectiva práctica en la formación inicial del profesorado resulta más eficaz (Boyd *et al.*, 2009) y se ve fortalecida cuando se conecta con la práctica profesional (Goos, 2014). Uniendo todas estas ideas, y teniendo en cuenta que las tareas profesionales deben ser el eje vertebrador del currículo de formación de profesorado (Ball y Forzani, 2007), nos centramos en la tarea profesional de reflexión tras una sesión de clase como

medio para planificar más eficazmente la siguiente. Esta reflexión es más efectiva si se apoya en un marco organizativo (Santagata y Guarino, 2011) y se ejerce desde una mirada profesional (Fernández *et al.*, 2018); en este caso, nuestro marco organizativo será MTSK (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018).

Entre los temas en los que el profesorado de Educación Primaria ha de estar sólidamente preparado se encuentra la definición de conceptos geométricos, como, por ejemplo, el de polígono.

Esta tarea se inscribe en el proceso de razonamiento geométrico de definir (Gutiérrez y Jaime, 1998) como parte del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. Parece evidente que el conocimiento del profesorado de matemáticas incluye no solo las definiciones de los conceptos matemáticos, sino también las estructuras que las sustentan y el modo en que se debe definir (Zazkis y Leikin, 2008).

Objetivos generales

1. Desarrollar el conocimiento especializado del profesorado en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la definición de polígono.
2. Reflexionar sobre la práctica matemática de definir en el contexto de los polígonos.
3. Identificar ejemplos, contraejemplos y no ejemplos útiles para determinar una definición del concepto de polígono.
4. Desarrollar la mirada profesional del profesorado en formación sobre la identificación del pensamiento del alumnado, la interpretación y el diseño de actividades (Fernández *et al.*, 2018).

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para resolver las actividades planteadas en esta tarea, el profesorado en formación debe conocer previamente el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998) e identificar las principales características de la forma en la que el alumnado desarrolla los principales procesos de razonamiento. Se habrá tratado ya la postura de Canals (1997) sobre el conocimiento geométrico y las orientaciones para trabajar este contenido de asociaciones como NCTM (2000) y el currículo oficial.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Para contextualizar el caso, se comienza con la visualización de la figura 7.1, que el profesorado en formación deberá analizar para detectar errores en la agrupación de las figuras. Se plantea la actividad 1 para resolver primero individualmente y luego en grupos de unos cuatro miembros. Se debe tener en cuenta que el profesorado en formación cometerá errores similares a los que muestra el alumnado que aparece en la transcripción, como indicar que el círculo es un polígono o que ciertas figuras curvas o abiertas son polígonos porque «se parecen» a un triángulo o un rectángulo, por ejemplo; esto puede ser usado para problematizar la situación mediante preguntas que lleven al profesorado en formación a generar, partiendo del error, su propia definición de polígono. Dependiendo de cómo sea la participación del profesorado en formación, quien dirige la formación podría cuestionar, por ejemplo: «¿Por qué el alumnado considera que las figuras 3 y 12 están en diferentes categorías?, ¿qué crees que les hace pensar que el círculo es un polígono?, ¿es esta tarea adecuada para el nivel en que se propone?, ¿qué preguntas plantearías en la sesión para dirigir al alumnado hacia el objetivo de la misma?».

En la actividad 2 nos interesa la reflexión sobre el tratamiento del concepto de polígono como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Quien dirige la formación puede preguntar por las limitaciones o fortalezas del uso de la pizarra cuando el alumnado resuelve la actividad. También es importante fomentar la reflexión sobre la gestión que realiza la maestra durante el desarrollo de la actividad con el alumnado. ¿Qué se entiende por vértice? ¿Y por polígono simple? ¿De qué forma se incentiva la argumentación como habilidad matemática?

Se proporciona al profesorado en formación la tabla de observación (Climent *et al.*, 2013, anexo II) para organizar la información de las transcripciones que va a analizar. Con ella puede contestar más fácilmente a las preguntas de cada actividad.

La tabla del anexo I, que será usada para que conozca cuáles son las características de una definición matemática, deberá mostrarse después de que el futuro profesorado problematice su propia concepción de lo que es una definición.

Con ambas ideas se puede discutir sobre su imagen del concepto y la definición correcta, antes de trabajar con los episodios que se observarán.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Hojas de trabajo.
- ▶ Anexos I y II.

Actividades que conforman la tarea

La tarea gira en torno a la definición de polígono. Se basa en la transcripción de una clase de quinto de Primaria en la que se está trabajando contenido geométrico. La maestra plantea una actividad con la intención de que el alumnado recuerde lo que ya conoce sobre los polígonos y establezca diferentes criterios que permitan su clasificación.

La transcripción de la sesión se complementa y enriquece para transformarla en un caso de aprendizaje (con gestión alternativa de la maestra, otras posibles otras respuestas del alumnado o interacciones distintas entre la maestra y el alumnado). Se fragmenta en episodios y se acompaña de actividades orientadas al desarrollo de la reflexión del profesorado en formación y a la movilización del conocimiento especializado sobre los polígonos.

Esta tarea tiene dos actividades. El profesorado en formación debe responder, en un primer momento, de manera individual; a continuación, compartirá sus respuestas en grupos de cuatro personas antes de la puesta en común en la que quien dirige la formación gestionará el debate. Todas las respuestas han de estar justificadas, con una argumentación correcta, precisa y válida desde una perspectiva didáctico-matemática.

Actividad 1. Analizar una distribución de figuras en polígonos y no polígonos dada por el alumnado

Descripción

Se describe una situación en la que, en un aula de quinto de Educación Primaria, el alumnado ha realizado una clasificación de figuras.

Se pide al profesorado en formación que analice la distribución de las figuras representadas por el alumnado en una pizarra (figura 7.1). Se pregunta entonces por las propiedades consideradas para establecer estos agrupamientos y por los argumentos esgrimidos por el alumnado para realizar esta distribución entre polígono y no polígonos.

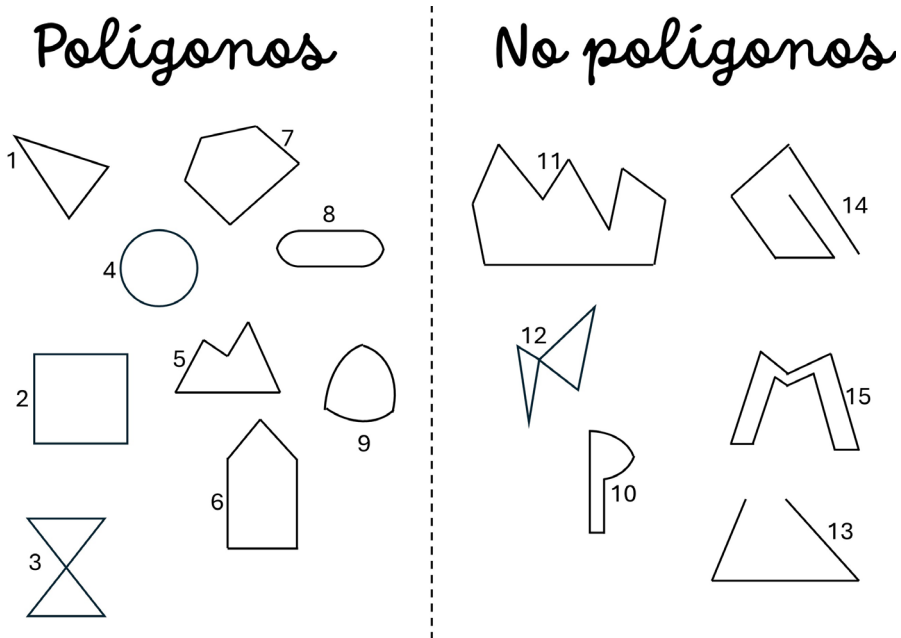


Figura 7.1. Formas planas: polígono frente a no polígono.

A continuación, se pide que el profesorado en formación enuncie su propia definición de polígono.

Objetivos específicos

- ▶ Revelar cómo interpreta el profesorado en formación el conocimiento sobre polígonos que manifiesta el alumnado a partir de la distribución de la figura 7.1.
- ▶ Evidenciar las ideas previas del profesorado en formación sobre la definición de polígono y propiciar la toma de conciencia sobre su propia imagen del concepto.
- ▶ Reflexionar sobre la idoneidad de la definición dada por el alumnado respecto a los atributos que esta debe cumplir.

Orientaciones didácticas

Quien dirige la formación debe ser consciente de que probablemente sea una de las primeras veces en las que el profesorado en formación afronta la tarea de definir en matemáticas.

Esta actividad se inicia de manera individual para después comentarse con los compañeros de su equipo. Posteriormente, quien dirige la formación promueve un debate con todo el grupo, atiende posibles dudas y formula preguntas y comentarios para potenciar la reflexión.

Plantea preguntas que favorezcan el debate sobre las cuestiones propuestas en la actividad. Resuelve dudas e institucionaliza el saber incidiendo en las características propias de una definición matemática.

Actividad 2. Análisis de una clase de quinto de Primaria en la que se trabaja la definición de polígono

Descripción

La actividad comienza con la lectura individual de un episodio de clase (ficha del alumnado) en el que se describe cómo se resuelve en el aula de Primaria la actividad planteada por la maestra. El alumnado sale a la pizarra para dibujar una figura e identificarla como polígono o como no polígono, y entre todo el alumnado se discute la posibilidad de incluirla en un grupo u otro (polígonos y no polígonos) atendiendo a las características de cada figura.

De esta manera se pone al profesorado en formación ante una situación real de aula con el objetivo de que asuma el papel de docente, analice las respuestas del alumnado y valore la gestión que la maestra hace de la situación. Para ello se le facilita un documento de recogida de información (Anexo II) que permita centrar la atención en determinados aspectos de la realidad descrita, relacionados con el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas.

Partiendo de la transcripción de la actividad 2, el profesorado en formación debe responder a las siguientes preguntas:

- 2.1. De acuerdo con la definición que han establecido en el grupo, ¿la distribución de la figura 7.1 es correcta? ¿Esta definición coincide con la vuestra?
- 2.2. A partir del anexo I (véanse las hojas de trabajo correspondientes a esta actividad, donde se presentan los atributos que debe cumplir una definición matemática según Escudero *et al.*, 2014), analizad si la definición a la que ha llegado el alumnado cumple dichos atributos.
- 2.3. Indicad los conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad. ¿Qué argumentos utiliza el alumnado para incluir o no una figura como polígono? ¿Existe una definición única de polígono?
- 2.4. ¿Qué se espera que aprenda el alumnado de Primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a haberle proporcionado una definición a priori?
- 2.5. ¿Qué papel desempeñan los ejemplos, los no ejemplos y los contraejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?
- 2.6. ¿Qué dificultades del alumnado identificáis en sus respuestas a la situación planteada? ¿Cuál puede ser el origen de dichas dificultades?

- 2.7. A partir de las respuestas del alumnado, ¿podrías determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada alumno? Seleccionad una intervención que os parezca especialmente significativa en este sentido.
- 2.8. En relación con la gestión que realiza la maestra en la actividad, ¿qué destacaríais de su actuación?

Objetivos específicos

- ▶ Afrontar la construcción de la definición de un concepto matemático conocido, considerando las características de una definición matemática.
- ▶ Analizar los argumentos dados por el alumnado para justificar la inclusión de una figura en el grupo de polígonos o de no polígonos.
- ▶ Reflexionar sobre las dificultades en la comprensión del concepto de polígono que podrían estar asociadas a la imagen que el alumnado tiene de este.
- ▶ Estudiar la gestión de la clase que realiza la maestra.
- ▶ Determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada alumno atendiendo a sus intervenciones.

Orientaciones didácticas

Quien dirige la formación debe fomentar la reflexión sobre la relación que existe entre la imagen de un concepto y su definición. Asimismo, es importante profundizar en el papel de los ejemplos, contraejemplos y no ejemplos, y en cómo su uso habitual puede limitar el aprendizaje.

Al igual que la actividad 1, esta se inicia de manera individual para después comentarse con los compañeros de equipo. Posteriormente, quien dirige la formación promueve un debate con todo el grupo de profesorado en formación, atiende posibles dudas y formula preguntas y comentarios para potenciar la reflexión.

Plantea preguntas que favorezcan el debate sobre las cuestiones propuestas en la actividad. Resuelve dudas e institucionaliza el saber incidiendo en las características propias de una definición matemática.

Referencias

- Ball, D. L. y Forzani, F. M. (2007). What makes education research «educational»? *Educational Researcher*, 36(9), 529-540.
- Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S. y Wyckoff, J. (2009). Teacher preparation and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 31(4), 416-440. <https://doi.org/10.3102/0162373709353129>
- Canals, M. A. (1997). La geometría en las primeras edades escolares. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (25), 31-44.

- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Climent, N., Romero-Cortés, J., Carrillo-Yañez, J., Muñoz-Catalán, M. M. y Contreras, L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 13-36.
- Escudero, I. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Relime*, 17(1), 7-32.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 39-61. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229>
- Goos, M. (2014). Researcher-teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46, 189-200.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2/3), 27-46. <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutJai98.pdf>
- Hill, H. C., Lynch, K., Gonzalez, K. E. y Pollard, C. (2020). Professional development that improves STEM outcomes. *Phi Delta Kappan*, 101(5), 50-56. <https://doi.org/10.1177/0031721720903829>
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. [Trad. cast.: *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales, 2003].
- Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education*, 43, 133-145. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0292-3>
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.

MTSK Trabajado en la tarea

Tabla 7.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Definición de polígono».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades	
			1	2
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Características críticas que determinan que una figura sea un polígono.		X
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos		
		Definición de polígono.	X	X
	Registros de representación	Representación del concepto de polígono utilizando diferentes registros, como el verbal y el gráfico.	X	X
	KPM	La práctica de definir	Características de una definición matemática.	
La práctica de demostrar		Saber seleccionar ejemplos, contraejemplos y no ejemplos de un concepto matemático.		X

Tabla 7.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Definición de polígono».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades		
			1	2	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Formas de interacción del alumnado con el contenido matemático	Formas naturales del alumnado de representar y definir el polígono.	X	X
			Estrategias de definición utilizadas por el alumnado.	X	
		Teorías sobre aprendizaje	Teoría de Van Hiele sobre procesos de razonamiento geométrico.		X
			Imagen mental y definición conceptual de polígono.		X
	Fortalezas y debilidades	Obstáculos, dificultades o errores asociados a la definición de polígono.		X	
	KMT	Recursos didácticos	Influencia del dibujo de figuras planas en papel o en pizarra (que destaca el contorno frente a la superficie) en la generación de la definición.		X
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Efecto limitante del abuso de ejemplos con determinados valores de propiedades irrelevantes en la construcción del concepto.	X	X
			Ejemplos distractores para la construcción de la definición de polígono.	X	X
			Criterios para decidir cuándo conviene utilizar una definición en el aula y cuándo conviene construirla.		X

Hojas de trabajo

Definición de polígono

ACTIVIDAD 1. Analizar una distribución de figuras en polígonos y no polígonos dada por el alumnado

En una clase de quinto de Educación Primaria en la que se trabaja contenido geométrico, la maestra plantea una actividad con la intención de hacer que el alumnado recuerde lo que ya conoce sobre los polígonos y establezca diferentes criterios que permitan su clasificación.

En la primera parte de la actividad, cada alumno, de manera individual, dibujará en su cuaderno al menos una forma que represente un polígono y otra que no lo sea, y reflexionará sobre las características que deben tener las figuras propuestas en cada caso. El fin último de la tarea es enunciar una definición de polígono entre toda la clase.

A continuación, el alumnado podrá representar una de sus figuras en la pizarra, que se habrá dividido previamente en dos zonas: una para polígonos y otra para no polígonos. A medida que cada alumno dibuja una figura en una de las zonas, se debate en gran grupo para determinar si todo el alumnado está de acuerdo con la selección planteada. Si no hay acuerdo, se entablará un diálogo para argumentar la inclusión o exclusión de la figura en el grupo correspondiente.

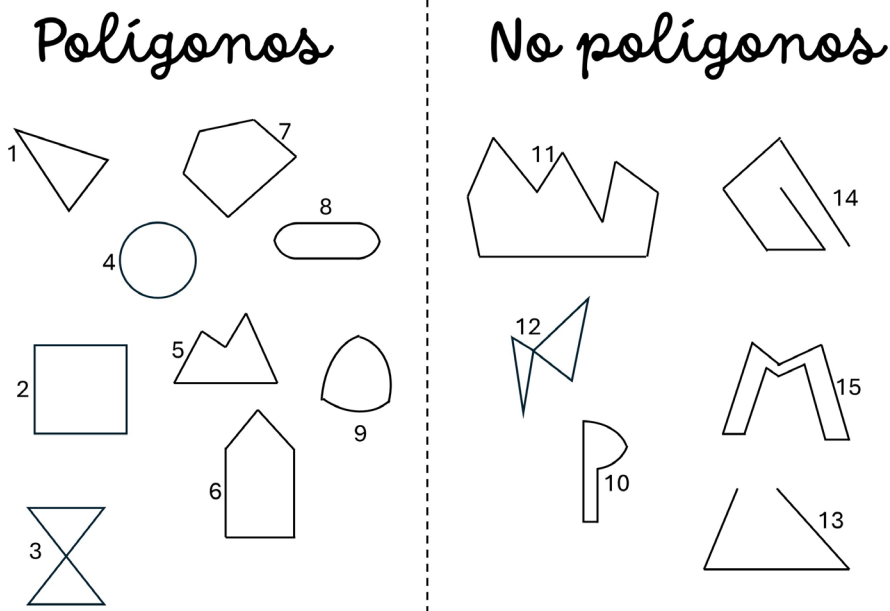


Figura 7.1. Formas planas: polígono frente a no polígono.

Las figuras representadas en la pizarra al finalizar la actividad se muestran en la figura 7.1:

- 1.1. Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte del alumnado (figura 7.1). ¿Qué propiedades han considerado para establecer estos agrupamientos? ¿Qué argumentos creéis que habrá esgrimido el alumnado para realizar esta distribución entre polígonos y no polígonos?
- 1.2. Enunciad una definición de polígono.

ACTIVIDAD 2. Análisis de una clase de quinto de Primaria en la que se trabaja la definición de polígono

Después de unos minutos, en los que el alumnado ha dibujado en sus cuadernos un ejemplo de polígono y otro de no polígono, la maestra pide que, de manera ordenada y de uno en uno, vayan saliendo para dibujar en la pizarra una de las figuras representadas en su cuaderno, indicando en qué grupo la incluyen. El resto de la clase debe analizar la figura y señalar si está de acuerdo con la asignación propuesta. Si existieran discrepancias, tendrán que argumentar su disconformidad para convencer al resto de compañeros.

M:² A ver, vamos a representar en la pizarra algunas de las figuras que habéis dibujado en vuestro cuaderno. Para ello iréis saliendo de manera ordenada, de uno en uno, y podréis colocar una figura en uno de los dos grupos: polígono o no polígono. En cada caso, el resto de la clase debe valorar si está de acuerdo o no con el grupo en el que se haya dibujado la figura. ¿Quién quiere ser el primero? *(Parte del alumnado levanta la mano. La maestra le pide a uno de ellos que salga a la pizarra. Este dibuja la figura 1 en la zona de polígonos).*

M: ¿Consideráis que la figura que hay en la pizarra está colocada en su grupo correspondiente (polígono o no polígono)?

As: ¡Sí! *(Contestan a coro).*

M: ¿Por qué consideráis que es un polígono?

A₁: Porque es un triángulo, y los triángulos son polígonos. Lo vimos el curso pasado.

M: ¿Qué características tiene la figura para ser un polígono?

A₂: Tiene lados y vértices.

(A continuación, otra alumna representa la figura 2. El resto de la clase está de acuerdo y alega las mismas razones que en el caso anterior. La maestra les pide que sean más arriesgadas y dibujen figuras menos familiares).

M: El siguiente debe dibujar una figura que considere que no es un polígono. *(Una alumna dibuja la figura 13. Uno de sus compañeros considera que no está en el grupo adecuado).*

2. Se identificamos con M las intervenciones de la maestra; con As, las del alumnado en grupo. Las intervenciones individuales se identifican como A₁, A₂, etc., donde cada subíndice corresponde a una alumna o un alumno diferente.

A₃: Pero esa figura también es un polígono porque tiene lados y vértices como las de antes.

A₂: No, no lo es, porque tiene un hueco.

M: ¿Qué quieres decir con que tiene un hueco?

A₂: Que no se unen los lados.

M: ¿Quieres decir que no está cerrada? Entonces no es un polígono porque, aunque tiene lados y vértices, no está cerrada.

(El siguiente alumnado representa las figuras 6 y 7 en el grupo de polígonos y la 14 en la de no polígonos. Todos los alumnos están de acuerdo y utilizan argumentos análogos a los anteriores. La siguiente figura dibujada es la 11).

M: ¿Tú por qué crees que no es un polígono?

A₄: Porque tiene picos para dentro.

M: ¿Quieres decir que los ángulos que se forman no están todos hacia fuera? ¿Un polígono no puede tener ángulos hacia dentro? A ver, ¿quién está de acuerdo con J. (A4)?

A₅: Nosotras creemos que sí lo es, porque está cerrado y tiene lados y vértices.

M: Entonces habrá que pasar la figura 11 al grupo de los polígonos. ¿Todos estáis de acuerdo?

As: ¡Sí! *(Responden a coro).*

(A continuación la figura 5, de características parecidas a la anterior. Toda la clase está de acuerdo en considerarla polígono. Después, un alumno dibuja la figura 4).

M: ¿Estáis de acuerdo en que el círculo es un polígono?

A₂: Yo no, seño, porque no tiene vértices.

M: Eso es: el contorno es una línea curva y no tiene vértices. ¿Todos de acuerdo? *(El alumnado asiente).*

A₆: Pues yo pensaba que sí era un polígono, porque siempre lo he visto con el cuadrado, con el triángulo, con el rectángulo...

M: Es una figura geométrica, pero no cumple las propiedades que se necesitan para ser polígono.

(La siguiente figura que se representa es la 15. El alumno la coloca en el grupo de los no polígonos).

M: ¿Por qué crees que esta figura no es un polígono?

A₇: Porque es una letra.

A₃: Pero como figura tiene lados y vértices y es cerrada.

M: Claro, aunque tenga forma de letra, vista como figura es como la anterior. Es un polígono, ¿verdad?

As: ¡Sí! *(Responden a coro).*

A₇: Seño, entonces ¿las letras son polígonos?

M: Depende de la letra. Pon otro ejemplo.

(El alumno sale y dibuja la figura 10, con forma de P).

M: ¿Qué pensáis? La figura que ha representado vuestro compañero, ¿es un polígono?

A₂: Yo creo que sí, porque es cerrada y tiene lados y vértices.

A₃: Pues yo creo que no, porque tiene una parte curva y los lados de los polígonos tienen que ser rectos.

A₈: Señor, ¿eso es así? Es que yo había puesto un rectángulo diferente en los polígonos, como habías dicho que arriesgáramos.

M: ¿A qué te refieres con un rectángulo diferente? Sal y lo dibujas en la pizarra. *(El alumno dibuja la figura 8 en el grupo de los polígonos).*

A₈: Está cerrada, tiene cuatro lados y tiene vértices.

A₅: Sí, pero le ocurre como a la P: tiene lados curvos.

M: Efectivamente, es como el caso anterior. Es cerrada, tiene vértices y lados, pero no todos los lados son segmentos. Los lados de los polígonos son rectos.

A₉: Pues yo he puesto como polígono un triángulo con los lados curvos, para que fuera diferente.

M: ¿Así? *(Dibuja la figura 9).* En este caso ocurre como en los anteriores: no es polígono por no tener los lados rectos. ¿Alguna otra figura que queráis compartir?

(Una alumna levanta la mano, sale a la pizarra y dibuja la figura 3 en el grupo de los polígonos. En ese momento, otro compañero dice que tiene una figura parecida (la 12) y que él la ha colocado en el grupo de los no polígonos).

M: Estas dos figuras son muy parecidas. ¿Qué os hace pensar que es un polígono o que no lo es?

A₁₀: Yo creo que sí lo es porque cumple las condiciones que hemos dicho antes. Es cerrado, tiene lados rectos y tiene vértices.

A₁₁: Pero tiene un vértice del que salen cuatro lados, y en los vértices de los polígonos solo pueden salir dos, ¿no, señor?

M: Así es. Vamos a considerar los polígonos simples, en los que de cada vértice solo pueden salir dos lados. Por tanto, ¿cómo podemos definir el concepto de *polígono*?

A₆: Pues una figura plana cerrada, con lados que son rectos y vértices de los que salen dos lados.

Preguntas

A partir de la transcripción de la actividad 2, responde a las siguientes preguntas:

- 2.1.** De acuerdo con la definición que han establecido en la clase, ¿la distribución de la figura 7.1 es correcta? ¿Esta definición coincide con la vuestra?
- 2.2.** A partir del anexo I, analizad si la definición a la que ha llegado el alumnado cumple los atributos de una definición matemática.
- 2.3.** Indicad los conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad. ¿Qué argumentos utiliza el alumnado para incluir o no una figura como polígono? ¿Existe una definición única de polígono?
- 2.4.** ¿Qué se espera que aprenda el alumnado de Primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a haberle proporcionado una definición *a priori*?

- 2.5. ¿Qué papel desempeñan los ejemplos, los no ejemplos y los contraejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?
- 2.6. ¿Qué dificultades del alumnado identificáis en las respuestas a la situación planteada? ¿Cuál puede ser el origen de dichas dificultades?
- 2.7. A partir de las respuestas del alumnado, ¿podrías determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada alumno? Seleccionad una intervención que os parezca especialmente significativa en este sentido.
- 2.8. En relación con la gestión que realiza la maestra en la actividad, ¿qué destacaríais de su actuación?

ANEXO I. Atributos de una definición

Atributos que debe cumplir una definición matemática	
Jerarquía (precisión)	Los términos usados deben ser básicos o estar definidos previamente.
No circularidad	En la definición de un concepto no se puede hacer uso del propio concepto. Asimismo, si para definir un concepto se recurre a otro, la definición del segundo no puede basarse en la del primero.
Minimalidad	No redundante: ninguna característica puede deducirse del resto.
No ambigüedad	Deber quedar claro qué objetos pertenecen a una clase.
No contradictoria	Las características deben ser consistentes: no puede estar presente una y su opuesta.
Invariante	Debe mantenerse bajo el cambio de representación.
Equivalencia	Se pueden enunciar distintas definiciones de un mismo concepto.

Fuente: Escudero *et al.* (2017).

ANEXO II. Tabla de observación

Aspectos que observar	Lo que observo (Breve descripción de lo que parece evidenciarse)	Lo que interpreto (¿Por qué considero esto importante?)
<p>1. Estrategias de pensamiento, dificultades e ideas intuitivas del alumnado. Cómo piensa los alumnos acerca del contenido y cómo lo comprenden. Cuáles son sus razonamientos. Qué ideas parecen mayoritarias, y cuáles, intuitivas. Qué dificultades identificas en alumnos concretos y en el grupo en general, y qué origen les atribuyes. Qué aspectos del contenido parecen más fáciles de comprender, y cuáles, más problemáticos.</p>		
<p>2. Contenidos trabajados y énfasis. Qué contenidos concretos se trabajan en la sesión. Cuáles echas en falta. En cuáles se pone el énfasis y cuáles se trabajan de modo secundario.</p>		
<p>3. Tipo de actividades. Qué actividades se proponen y de qué tipo son (ejercicios, problemas o actividades de exploración; de lápiz y papel o manipulativas).</p>		

Aspectos que observar	Lo que observo (Breve descripción de lo que parece evidenciarse)	Lo que interpreto (¿Por qué considero esto importante?)
<p>4. Recursos: potencialidad, limitaciones y uso. Qué recursos se emplean para la enseñanza del contenido. Cómo se usan. Qué ventajas parecen tener y qué limitaciones encuentras.</p>		
<p>5. Ejemplos empleados. Representaciones del contenido y su problemática. Qué ejemplos y situaciones se emplean para ilustrar, dar sentido o aclarar el contenido. Qué representaciones se usan (pictóricas, simbólicas, lenguaje matemático, etc.). ¿Identificas elementos problemáticos?</p>		
<p>6. Conocimiento del docente sobre el contenido. Qué elementos de la actividad matemática identificas en la sesión (argumentar, definir, demostrar, comprobar, conjeturar) tanto en el trabajo de la maestra como en el del alumnado. ¿Te parecen correctos matemáticamente? Qué relaciones se hacen explícitas entre el contenido abordado y otros contenidos. ¿Identificas conexiones que no se abordan? ¿Hay situaciones en la sesión que permitirían abordarlas?</p>		
<p>7. Conocimiento del docente sobre la enseñanza-aprendizaje del contenido. Qué procedimientos concretos para la enseñanza del contenido emplea la maestra.</p>		
<p>8. Adecuación al currículo. Qué sugerencias curriculares sobre el tratamiento del contenido se tienen en consideración y cuáles no. Qué nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperarías en el alumnado de este curso en relación con el contenido que se ha de tratar.</p>		

Fuente: Climent *et al.* (2013).

8. Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza

Juan Pedro Martín-Díaz

<https://orcid.org/0000-0001-6522-824X>

Universidad Huelva (España)

M. Isabel Pascual

<https://orcid.org/0000-0002-6429-2968>

Universidad de Sevilla (España)

Myriam Codes

<https://orcid.org/0000-0002-9528-0564>

Universidad Huelva (España)

Nuria Climent

<https://orcid.org/0000-0002-0064-1452>

Universidad Huelva (España)

Luis Carlos Contreras

<https://orcid.org/0000-0002-0044-2365>

Universidad Huelva (España)

Miguel Montes

<https://orcid.org/0000-0003-3181-0797>

Universidad Huelva (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria

Duración aproximada de la aplicación: 4 horas

Fundamentación

En la construcción de un concepto matemático intervienen esencialmente dos prácticas matemáticas: definir y clasificar, que pueden considerarse complementarias (Muñoz-Catalán *et al.*, 2013), dado que la definición de un concepto requiere el uso de criterios para clasificar casos como ejemplos o no ejemplos del concepto (Haj-Yahya *et al.*, 2023). En este sentido, Shir y Zaslavsky (2001) señalan que la construcción de una definición pasa por clasificar ejemplos y no ejemplos.

El debate clásico ha enfrentado dos posturas: proporcionar la definición para aplicarla o construirla con el alumnado. Freudenthal (1973)

apostaba por que el alumnado construyera en la escuela una definición, en lugar de proporcionársela directamente. Posteriormente, muchos otros autores han defendido la potencialidad de «definir» como práctica matemática escolar, tan importante como resolver problemas o demostrar (De Villiers, 1998). Recibir una definición dada no implica, en general, comprender el concepto: solo proporciona una primera aproximación a su imagen. Así, esa imagen del concepto suele ser inconsistente con su definición, y resulta más determinante para la comprensión que su propia definición (Hershkowitz, 1989). Estos resultados constituyen el fundamento de la tarea y la base del conocimiento de la enseñanza (KMT) que esta persigue, en relación con la categoría «estrategias, técnicas, tareas y ejemplos» del modelo MTSK.

Esta tarea permite desarrollar de forma interrelacionada el *conocimiento matemático para la enseñanza* y el *conocimiento didáctico del contenido*. De un lado, la tarea ofrece al profesorado en formación la posibilidad de reflexionar en profundidad sobre los elementos matemáticos que conforman la definición de polígono, y lo ayuda a construir conocimiento sobre la práctica matemática de definir. Resulta útil desde la perspectiva del desempaquetado del concepto, ya que permite su comprensión a partir de los conceptos de línea poligonal cerrada, vértice, ángulo, superficie cerrada e interior continuo. Asimismo, sirve de herramienta para reflexionar sobre la imagen y la definición conceptual tanto del profesorado en formación como de su futuro alumnado. De otro lado, el uso de viñetas y las situaciones presentadas permiten que el profesorado en formación contextualice su análisis en el aula de Primaria y tenga en consideración el análisis de ejemplos y las dificultades del alumnado en esa etapa.

La imagen del concepto incluye todos los ejemplos, atributos y procesos que cada estudiante asocia al concepto; mientras que la definición recoge los atributos necesarios y suficientes para construir el concepto. Esta construcción es de carácter personal; por tanto, la imagen y la definición de un concepto varían de una persona a otra (Haj-Yahya *et al.*, 2023). El profesorado en formación ha de conocer el papel de la imagen y la definición de un concepto en el aprendizaje de este, lo que forma parte del conocimiento sobre teorías de aprendizaje (KFLM). Es común que el alumnado considere los ejemplos prototípicos como los más representativos, de modo que estos se convierten en la imagen de referencia frente a otros ejemplos (Hershkowitz, 1989). Ambos aspectos, el efecto de los ejemplos prototípicos y la inconsistencia entre definición e imagen del concepto, están descritos en la literatura, tanto en relación con el alumnado no universitario como con el profesorado en ejercicio y el profesorado en formación (Hilf, 2021).

Objetivos generales

Se busca que el profesorado en formación:

1. Identifique los elementos matemáticos que componen la definición de polígono.
2. Contribuya al aprendizaje de la práctica matemática de definir.
3. Sepa analizar una definición de polígono en términos de lenguaje, suficiencia y redundancia.
4. Comprenda el papel de los contraejemplos como herramienta de validación en el aula de Primaria.
5. Relacione ejemplos críticos y no ejemplos de polígono con posibles dificultades del alumnado de Primaria.
6. Reflexione sobre las potencialidades y limitaciones de los conjuntos de ejemplos para la enseñanza.
7. Profundice en la comprensión de la imagen mental de polígono del alumnado de Educación Primaria.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar la actividad, el profesorado en formación debe tener conocimientos sobre:

- ▶ Conceptos básicos de geometría plana: ángulo, paralelismo, perpendicularidad, simetría, diagonales, etc.
- ▶ Disponer de una primera definición de polígono.
- ▶ Saber diferenciar entre figuras planas (rectángulo, triángulo y sus tipos) y conocer las características de algunos polígonos (concavidad, número de lados, etc.).

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Como tarea previa a la primera sesión, se pide al profesorado en formación responder de manera individual (preferiblemente en un archivo Word) a unas preguntas con el objetivo de identificar su conocimiento previo sobre el concepto de polígono (véase el anexo I). Sus respuestas deben basarse en los recuerdos que conservan del periodo de Educación Primaria, sin consultar otras fuentes.

La tarea completa se ha diseñado con tres actividades: una primera para justificar la necesidad de la tarea y presentar al profesorado en formación una situación de aula (actividad 1), una actividad de desarrollo que incluye un análisis de viñetas (actividad 2) y una actividad de cierre con una puesta en común (actividad 3), institucionalización de los aprendizajes y lecturas recomendadas. Por ello, las orientaciones se establecen para cada una de las actividades.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Hojas de trabajo.
- ▶ Lecturas: Barrantes y Zapata (2008); Figueiredo y Contreras (2015); Vinner (1991).

Actividad 1. Elección de imágenes para construir el concepto de polígono

Descripción

Quien dirige la formación comenzará la actividad pidiendo al profesorado en formación que complete individualmente el anexo I como evaluación inicial.

Posteriormente, presenta la tarea y ayuda al profesorado en formación a reflexionar sobre su propia imagen del concepto de polígono con consignas como la que se encuentra en la hoja de trabajo: «Dibuja cuatro polígonos diferentes y, a partir de ellos, ofrece una definición de polígono».

La experiencia indica que es esperable que el profesorado en formación dibuje polígonos prototípicos con escasa variabilidad en el número de lados, posiciones estandarizadas, ausencia de la dimensión convexidad/concavidad o predominio de polígono regulares. Cada uno de estos aspectos puede discutirse *a priori* o integrar la reflexión sobre los mismos en el análisis de las viñetas.

Las definiciones de polígono pueden evaluarse en función de los elementos matemáticos que se contemplan o de la ambigüedad en el uso del vocabulario. Una dinámica de puesta a prueba de las definiciones ayuda a examinar su corrección: quien dirige la formación busca imágenes que cumplan la definición propuesta por el profesorado en formación, pero que no sean imágenes de polígonos. También pueden presentarse las ideas de imagen del concepto y definición del concepto, así como su papel en el aprendizaje matemático (Vinner, 1991).

Puede finalizarse la actividad 1 con preguntas como: «¿Qué creéis que aporta cada una de esas imágenes a la definición de polígono? ¿Cambiaría vuestra selección si quisierais hacer una secuencia de enseñanza de la definición?».

La siguiente parte de la tarea se centra en explicitar la imagen conceptual y construir la definición de polígono en el contexto escolar.

Desde la perspectiva matemática, se pretende que el profesorado en formación adquiera competencias en la elaboración de clasificaciones distintas de las que habitualmente aparecen en los libros de texto, con criterios propios que permitan profundizar en las características de los polígonos.

Desde la perspectiva didáctica, se pretende que el profesorado en formación adquiera competencias que le permitan crear propuestas didácticas inductivas para la construcción de conceptos, como puede ser, en este caso, el concepto de polígono.

Objetivos específicos

- ▶ La construcción de un primer espacio de ejemplos del concepto de polígono. Se trata de un espacio de ejemplos de carácter personal que se espera que evolucione a lo largo de la tarea y que se evaluará en la actividad final.

Orientaciones didácticas

De manera general, se propone trabajar toda la tarea en pequeños equipos para realizar una primera aproximación a las actividades y después realizar discusiones en plenaria, de modo que las puestas en común permitan consensuar cada actividad.

Actividad 2. Análisis de viñetas que reproducen una situación de aula

Descripción

La consigna de la actividad es observar diferentes viñetas sobre la construcción de la definición de polígono en el aula de Enrique, tutor de quinto de Educación Primaria. Se solicita observar las viñetas y analizar los ejemplos que aparecen y las intervenciones del alumnado para responder a algunas preguntas.

En la actividad 2.1 se pide al profesorado en formación que analice la primera viñeta, que puede observarse en la figura 8.1.

Quien dirige la formación plantea algunas preguntas al profesorado en formación sobre esta viñeta. Con la pregunta 2.1.1 («¿Qué os parece el carácter abierto de la actividad?») se aborda la construcción inductiva de clasificaciones. Con la 2.1.2 («¿La

instrucción del maestro de la viñeta es clara?») se busca que el profesorado en formación analice detalladamente el enunciado de la actividad. Y la pregunta 2.1.3 («¿Qué elementos de diferenciación entre las figuras esperáis que encuentre el alumnado de Educación Primaria?») conduce a distintos criterios de clasificación.



Figura 8.1. Viñeta 1.



Figura 8.2. Viñeta 2.

En la actividad 2.2 se solicita al profesorado en formación que analice la segunda viñeta, que puede observarse en la figura 8.2.

A partir de esta viñeta se propone reflexionar sobre cuestiones como la 2.2.1: «¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las figuras?, ¿qué puede resultarle más relevante al alumnado de Primaria?», con la que se busca que el profesorado en formación ofrezca distintas razones por las que una figura puede estar en un grupo o en otro. Con la pregunta 2.2.2 («¿Qué repercusión tiene la aparición del triángulo como segunda figura para la construcción de la definición de polígono?») se pretende que se generen alternativas a la propuesta. Por último, con la pregunta 2.2.3 («¿Cuál sería vuestra actuación como docentes en cada caso?») se busca observar la reacción del profesorado en formación ante situaciones de contingencia.

En la actividad 2.3 se solicita al profesorado en formación que analice la tercera viñeta, que puede observarse en la figura 8.3.

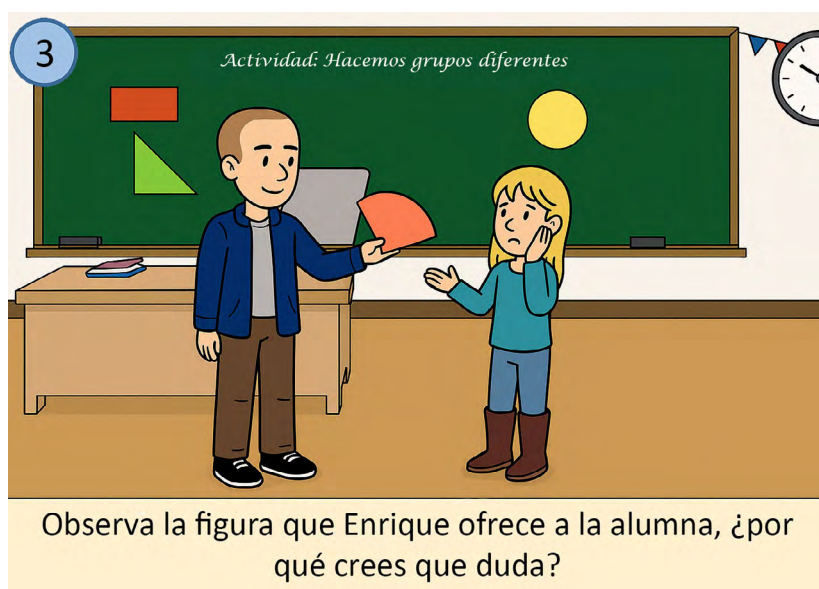


Figura 8.3. Viñeta 3.

En esta viñeta parece haberse detectado el carácter rectilíneo/curvilíneo al distinguir el rectángulo y el triángulo del círculo. Para reflexionar con el profesorado en formación sobre el sector circular se proponen las siguientes preguntas: 2.3.1 («Si la definición de polígono que se está construyendo contempla que los lados son rectilíneos, ¿cuál es el papel de todos/al menos un lado recto en la definición de polígono?, ¿creéis que es necesario hacerlo explícito para una mejor comprensión?»), con la que se discute sobre la ambigüedad en la construcción de definiciones. Con la pregunta 2.3.2 («Si se han identificado los conceptos de vértices y ángulos, ¿cuántos

En las preguntas 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3 se busca que el profesorado en formación reflexione sobre aspectos como lados curvos y rectos, concavidad y convexidad, regularidad e irregularidad de las figuras, posicionalidad y escasa variación de lados, así como sobre las particularidades del contexto de Educación Primaria.

En la actividad 2.5 se solicita al profesorado en formación analizar la quinta viñeta, que puede observarse en la figura 8.5.

Con esta viñeta se pretende analizar la definición que se presenta. Quien dirige la formación puede utilizar las preguntas 2.5.1 y 2.5.2 para reflexionar sobre la definición de superficie cerrada y sobre algunas cuestiones didácticas relacionadas con la tarea.

En la actividad 2.6 se solicita al profesorado en formación que analice la sexta viñeta, que puede observarse en la figura 8.6.



Figura 8.6. Viñeta 6.

Con esta viñeta se propone una reflexión sobre el uso de no ejemplos para delimitar definiciones a través de las preguntas 2.6.1, 2.6.2 y 2.6.3.

Orientaciones didácticas

La sesión será de carácter grupal. Una posibilidad es crear grupos pequeños (3-5 miembros) para promover la reflexión.

Se guiará al profesorado en formación mediante las preguntas propuestas en el guion con el objetivo de fomentar la reflexión para alcanzar los objetivos propuestos en la tarea.

Actividad 3. Cierre y reflexión final

Descripción

En esta sección se pretende que el profesorado en formación reflexione sobre cómo ha cambiado su modo de entender la definición de polígono. Para ello se le pide que complete de nuevo la actividad del anexo I, que sirvió como evaluación inicial. Además, conviene invitarlo a reflexionar con amplitud y profundidad sobre el uso de materiales didácticos en el aula, sus alcances y limitaciones. También puede compararse el espacio de ejemplos que el profesorado en formación creó al principio con el espacio de ejemplos de la tarea, con el objetivo de que identifique su propia evolución.

Como síntesis de todo lo abordado, conviene ayudar al profesorado en formación a que haga explícitos los conocimientos discutidos durante la sesión. Se recomienda proponerle la lectura crítica de Muñoz-Catalán *et al.* (2013). Una buena forma de evaluar el alcance de la actividad sería solicitarle el diseño de actividades destinadas a la construcción de otras definiciones geométricas (paralelogramo, poliedro, prisma, etc.), lo que permitirá analizar el papel de los ejemplos en la enseñanza en Primaria y el nivel de justificación de las propuestas. Los diseños del profesorado en formación pueden presentarse en sesiones posteriores.

Referencias

- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27, 55-71.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (eds.), *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248-255). University of Stellenbosch.
- Figueiredo, C. y Contreras, L. C. (2015). Ejemplos y ejemplificación en el aula de matemáticas. En L. Blanco, J. Cárdenas y A. Caballero (eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria* (pp. 209-224). Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing Company.
- Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R. y Dreyfus, T. (2023). Investigating students' geometrical proofs through the lens of students' definitions. *Mathematics Education Research Journal*, 35, 607-633. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00406-6>
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.

- Hilf, N. (2021). Use of the theory of Fischbein and the theory of Shulman for the study of teachers' algorithmic knowledge concerning the concept of the altitude of a triangle. *Journal for the Mathematics Education and Teaching Practices*, 2(2), 71-80.
- Muñoz-Catalán, M. C., Montes, M. A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Aguilar, A. (2013). *La clasificación de las figuras planas en primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Universidad de Huelva.
- Shir, K. y Zaslavsky, O. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of a square. En M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 161-168). Utrecht University.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 8.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades									
			1				2					
			1.1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6			
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Elementos matemáticos que componen la definición de polígono (línea poligonal, vértice, ángulo, superficie cerrada, interior continuo).					X	X	X			
	KPM	La práctica de definir							X			
		La práctica de demostrar	Validación en el aula de Primaria. Contraejemplos.									X

Tabla 8.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades						
			1		2				
			1.1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Teorías sobre aprendizaje							X
		Fortalezas y debilidades							X
	KMT	Teorías sobre enseñanza	Ventajas y limitaciones del uso de definiciones inductivas en Educación Primaria.	X	X	X	X	X	X
		Recursos didácticos (físicos o digitales)	Uso de geotiras en la construcción de la definición de polígono.						X
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Tareas para la enseñanza del concepto de polígono. Ventajas y limitaciones de un conjunto de ejemplos para la enseñanza.	X	X	X	X	X	X
	KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	Limitación de los conceptos abordados y de las imágenes presentadas para la comprensión del alumnado de quinto de Primaria.	X	X	X	X	X	X
		Creencias Sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	Sobre las matemáticas	La matemática como construcción humana y como vía de comunicación frente a la matemática como conocimiento preexistente.	X	X	X	X	X
La matemática escolar como proceso de construcción de conocimiento.			X	X	X	X	X	X	

Hojas de trabajo Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza

ACTIVIDAD 1. Elección de imágenes para construir el concepto de polígono

Después de completar individualmente la evaluación del anexo I, dibuja cuatro polígonos diferentes y, a partir de ellos, ofrece una definición de polígono.

ACTIVIDAD 2: Análisis de viñetas que reproducen una situación de aula

En esta actividad se trabaja en equipos de 5 a 7 miembros.

Escribe los nombres de los integrantes de tu equipo:

Recuerda que un representante del grupo debe recoger (preferentemente en un archivo de Word) las aportaciones en respuesta a cada una de las preguntas que se plantean. Observa las siguientes viñetas sobre la construcción de la definición de polígono en el aula de Enrique, tutor de quinto de Educación Primaria. Presta atención a los ejemplos y a las intervenciones del alumnado para responder a las preguntas que se formulan a continuación.

Actividad 2.1

Viñeta 1. Se observa la presentación de la actividad.



2.1.1 ¿Qué os parece el carácter abierto de la actividad?

2.1.2 ¿La instrucción del maestro es clara?

2.1.3 ¿Qué elementos de diferenciación entre las figuras esperarías que encuentren los alumnos de Educación Primaria?

ACTIVIDAD 2.2

Viñeta 2. Inicio de la actividad.



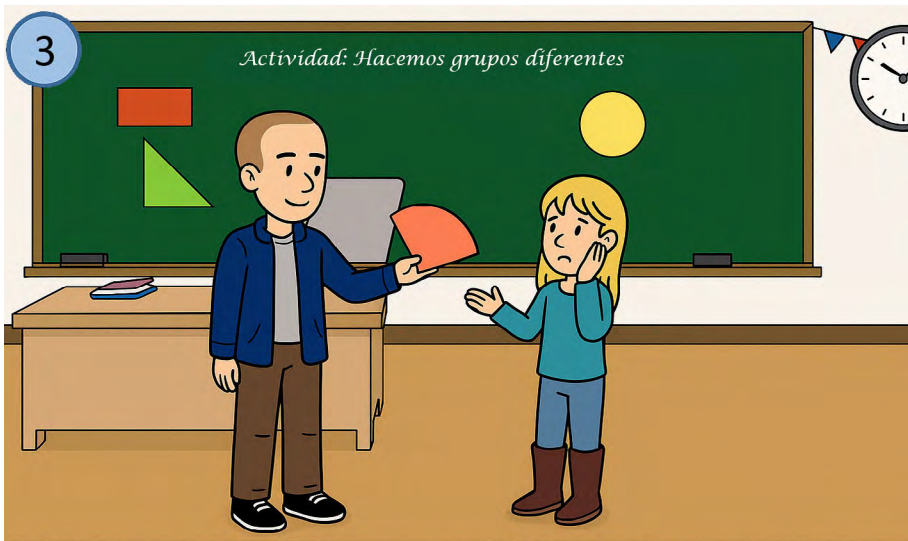
2.2.1 ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las figuras?, ¿qué puede resultarle más relevante al alumnado de Primaria?

2.2.2 ¿Qué repercusión tiene la aparición del triángulo como segunda figura para la construcción de la definición de polígono? (Alternativas a la tarea)

2.2.3 ¿Cuál sería vuestra actuación como docentes en cada caso? (Reacción ante situaciones de contingencia)

ACTIVIDAD 2.3

Viñeta 3. Parece haberse detectado el carácter rectilíneo/curvilíneo al distinguir el rectángulo y el triángulo del círculo.



Observa la figura que Enrique ofrece a la alumna, ¿por qué crees que duda?

Reflexión sobre el sector circular:

2.3.1 Si la definición de polígono que se está construyendo contempla que los lados son rectilíneos, ¿cuál es el papel de todos/al menos un lado recto en la definición de polígono?, ¿creéis que es necesario hacerlo explícito para una mejor comprensión?

2.3.2 Si se han identificado los conceptos de vértices y ángulos, ¿cuántos vértices y ángulos tiene el sector circular?

ACTIVIDAD 2.4

Viñeta 4.



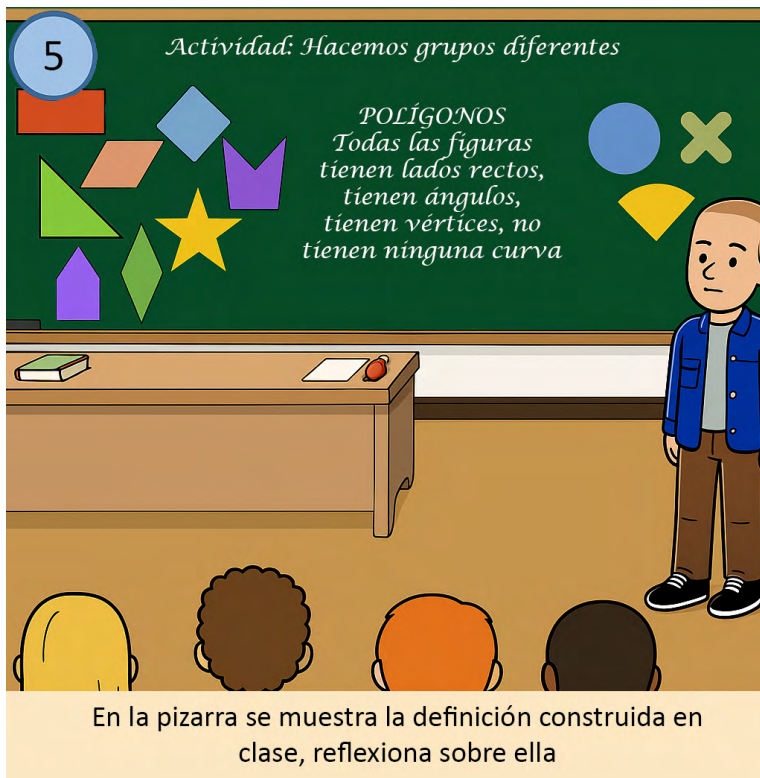
2.4.1 Sin tener en cuenta la definición de polígono conocida, ¿qué características permiten identificar el conjunto de ejemplos presentado?

2.4.2 ¿Se está induciendo alguna característica no crítica para la definición?

2.4.3 ¿Qué implicaciones tiene la selección de ejemplos de polígonos en el aprendizaje del alumnado de Primaria?

ACTIVIDAD 2.5

Viñeta 5. Análisis de la definición.

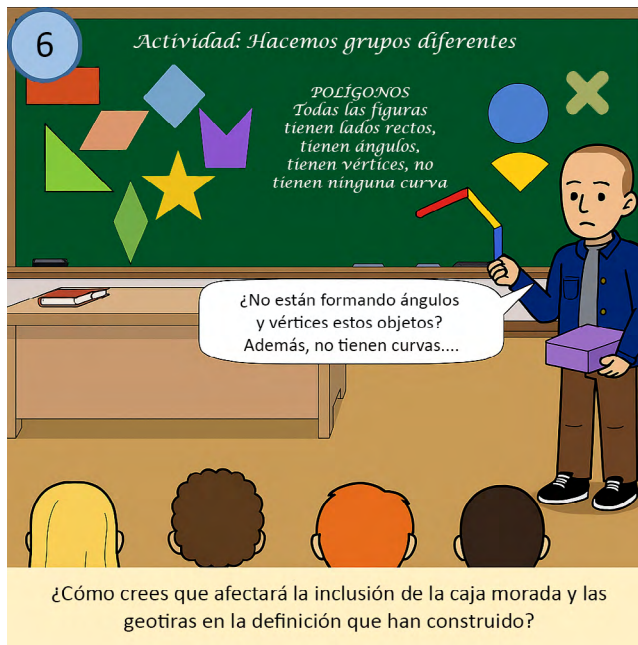


2.5.1 ¿Qué elementos matemáticos de la definición de polígono no se han tenido en cuenta?

2.5.2 ¿Cómo evaluáis la definición en cuanto a la redundancia de propiedades y la ambigüedad de los elementos incluidos? ¿Qué ventajas o limitaciones creéis que presenta para el aprendizaje del alumnado de Primaria?

ACTIVIDAD 2.6

Viñeta 6. El uso de no ejemplos para delimitar definiciones.



2.6.1 ¿Creéis que el alumnado de Primaria podría identificar el carácter cerrado y la bidimensionalidad como características del concepto de polígono?

2.6.2 ¿Cómo podría llevarse a cabo la reescritura de la definición?

2.6.3 ¿Qué ventajas o inconvenientes creéis que puede tener esta actividad frente a otra en la que primero se explique la definición y después se presenten los ejemplos?

ACTIVIDAD 3. Reflexión final

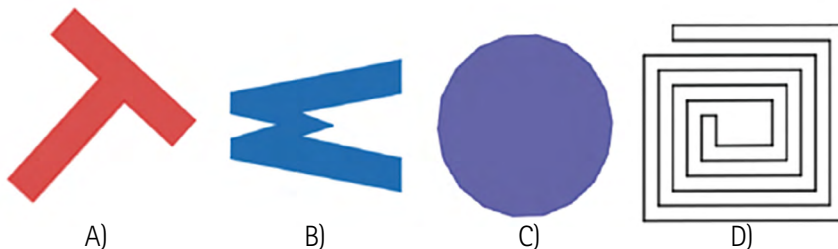
En esta sección debéis explicar cómo ha cambiado vuestro modo de entender la definición de polígono. Describid cómo concebíais vuestro espacio de ejemplos al inicio (plasmadlo) y cómo creéis ahora que debe enriquecerse.

ANEXO I. (Evaluación inicial)

1. Selecciona las opciones que consideres correctas.
 - A. Un polígono es una figura plana con borde.
 - B. Un polígono es una línea continua con ángulos entre sus partes.
 - C. Un polígono es la región plana delimitada por una línea quebrada en la que se puede distinguir lo que está dentro de lo que está fuera.
 - D. Un polígono es un conjunto de vértices y lados con área.
 - E. Un polígono es la región plana delimitada por una línea poligonal cerrada que tiene la misma cantidad de vértices, lados y ángulos.
 - F. Un polígono es una región delimitada por una línea poligonal cerrada, de manera que, dados dos puntos cualesquiera de dicha región, el segmento que los une queda siempre dentro de ella.

2. Señala de cuántas formas diferentes podrían clasificarse las figuras de la imagen:
 - A. No se pueden clasificar.
 - B. Solo se pueden clasificar de una forma.
 - C. Se pueden clasificar de dos formas.
 - D. Se pueden clasificar de más de dos formas.

3. Imagina que ejerces como docente y te proponen las siguientes figuras:



Selecciona cuáles consideras adecuadas para enseñar a tu alumnado lo que es un polígono. Justifica tu elección y explica por qué descartas las demás.

9. Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia

Matías Arce

<https://orcid.org/0000-0002-0770-8322>

Universidad de Valladolid (España)

Laura Conejo

<https://orcid.org/0000-0002-1419-1958>

Universidad de Valladolid (España)

Eric Flores-Medrano

<https://orcid.org/0000-0002-6134-729X>

Universidad Complutense de Madrid (España)

Formación inicial

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria/Máster de Secundaria (especialidad Matemáticas)

Duración aproximada de la aplicación: 3,5 horas

Fundamentación

A partir de publicaciones como *Principios y estándares para la educación matemática* del NCTM (2000), cada vez existe una mayor conciencia sobre la importancia de los procesos clave en matemáticas. Esto tiene su reflejo en los currículos, siendo un ejemplo el currículo asociado a la LOMLOE, con las competencias específicas en matemáticas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). El razonamiento y la prueba son dos de esos procesos clave, cuya importancia en educación matemática está ampliamente reconocida. En ellos intervienen numerosas acciones y subprocesos, tanto en la indagación

para formular y establecer conjeturas como en el desarrollo de una cadena lógica de razonamientos que permita validarlas (Arzarello, 2008; Jeannotte y Kieran, 2017). En estos procesos desempeñan un papel relevante los tres tipos de razonamiento matemático: el abductivo, vinculado al proceso de formulación de posibles hipótesis que puedan explicar o justificar una conjetura; el inductivo, centrado en la comprobación del cumplimiento de una conjetura en uno o varios casos particulares, y el deductivo, dirigido a la construcción de una cadena lógica de razonamiento que relacione el conocimiento validado con la conjetura.

Desde el punto de vista del docente, para diseñar y gestionar adecuadamente tareas que impliquen procesos de razonamiento y prueba, es necesario (que no suficiente) que el profesorado en formación desarrolle un conocimiento sólido sobre estos procesos. Modelos como el MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, Carrillo-Yañez *et al.*, 2018) reconocen explícitamente esta importancia e incluyen, dentro del conocimiento matemático necesario, el subdominio KPM (*Knowledge of Practices in Mathematics*), referido a las prácticas propias del quehacer matemático que permiten construir conocimiento matemático. Una de las prácticas consideradas es la de razonar y demostrar. Delgado-Rebolledo *et al.* (2022) distinguen, dentro de esta práctica, el conocimiento sobre cómo construir y desarrollar demostraciones (detección de regularidades y patrones, construcción de conjeturas, rol de ejemplos y contraejemplos), el conocimiento de métodos y tipos de demostración (y su validez), y el conocimiento de las funciones de la demostración.

Otra idea clave relacionada con los procesos de razonamiento y prueba es la de «esquemas de prueba». El esquema de prueba de una persona es aquello que la convence y persuade de la validez de un enunciado matemático (Harel y Sowder, 2007). Una de las dificultades más recurrentes asociadas a los procesos de razonamiento y prueba es el arraigo de los esquemas de prueba inductivos (Dreyfus, 2017); es decir, la convicción de que el razonamiento inductivo, a través de la comprobación en ejemplos particulares, basta para validar un enunciado. Estos esquemas de prueba inductivos están también presentes en el profesorado en formación (Arce y Conejo, 2019; Stylianides y Stylianides, 2009), lo que supone una limitación importante para el diseño y la gestión de tareas asociadas a procesos de razonamiento y prueba.

Se considera necesario que el futuro profesorado de matemáticas posea un esquema de prueba axiomático; es decir, que entienda la necesidad de que el convencimiento y la persuasión sobre la validez de un enunciado procedan de razonamientos de tipo deductivo. Si

se toma como referencia la teoría de los niveles de Van Hiele para el desarrollo del razonamiento geométrico (Jaime y Gutiérrez, 1990), el profesorado en formación ha de situarse al menos en el nivel 3, de *deducción informal*, caracterizado, entre otros aspectos, porque se avanza en la comprensión del rol del razonamiento deductivo en matemáticas (frente al nivel 2, de *análisis*, donde el razonamiento es de tipo experimental e inductivo). En las etapas finales de Educación Primaria y en los primeros cursos de Secundaria, el alumnado suele estar transitando del nivel 2 al nivel 3, lo que exige, para favorecer ese avance, que el profesorado se sitúe al menos en ese nivel 3 de *deducción informal*.

Esta tarea formativa pretende que el profesorado en formación desarrolle un proceso completo de conjeturación, razonamiento y demostración asociado al contenido geométrico de las relaciones angulares. La geometría suele proporcionar buenas oportunidades para trabajar estos procesos (NCTM, 2000). En este caso se han seleccionado las relaciones angulares (en concreto, la del ángulo inscrito en la circunferencia), dado que suelen ser un contenido poco trabajado en las aulas y pueden favorecer el desarrollo de procesos de conjeturación genuinos y poco influenciados por posibles conocimientos previos. A través de la tarea formativa se busca que el profesorado en formación reflexione sobre estos procesos de conjeturar, razonar y demostrar, con el fin de favorecer el avance hacia esquemas de prueba de tipo axiomático. Además, se pretende también que reflexione sobre la potencialidad de diferentes instrumentos y recursos para llevar a cabo estos procesos, y sobre la relación entre los posibles comportamientos del alumnado y los niveles de Van Hiele de desarrollo del razonamiento geométrico.

En la concepción de esta tarea formativa se han tenido en cuenta los principios de Lin *et al.* (2012) para diseñar tareas de conjeturación y prueba. Estos autores distinguen tres grandes etapas en estas tareas: el proceso de conjeturar, el proceso de transición de conjeturar a probar y el proceso de probar. Además, en diferentes momentos de la tarea se han introducido preguntas similares a los *conceptual awareness pillars* de Stylianides y Stylianides (2009) para que el profesorado en formación reflexione sobre lo realizado y pueda obtenerse información sobre sus esquemas de prueba.

En esta tarea formativa, el proceso de conjeturar está dividido en dos fases: una con lápiz, papel y útiles de dibujo, y otra con un *applet* de GeoGebra que permite dinamizar la construcción realizada. El objetivo es generar oportunidades para conjeturar a partir de la construcción y la observación, así como para reflexionar sobre el proceso y la conjetura resultante. En cuanto a la transición de conjeturar a probar, se pretende

que el alumnado perciba la necesidad de dar dicho paso. Para ello, la tarea incluye una fase en la que se plantean al profesorado en formación dos posibles hipótesis sobre por qué puede ser cierta la relación angular. Estas hipótesis se presentan a modo de razonamientos abductivos, como posibles razones que podrían explicar y justificar dicha relación. A través de *applets* de GeoGebra y preguntas orientadas al análisis de las hipótesis, se busca que el profesorado en formación refute ambas hipótesis como posibles justificaciones de la relación angular y reconozca el rol de los contraejemplos en este proceso.

A continuación, se formulan preguntas para que el profesorado en formación pueda plantear otras posibles hipótesis sobre por qué la conjetura es cierta y qué posibles relaciones angulares podrían explicar su cumplimiento. La tarea continúa, ya dentro del proceso de probar, con preguntas guiadas que favorecen la movilización del conocimiento necesario para construir la demostración de la relación angular en los tres casos existentes. En una sesión posterior, se desarrolla la última fase de la tarea, dedicada a la reflexión conjunta sobre lo trabajado, a su institucionalización y al planteamiento de relaciones con el conocimiento didáctico del contenido.

Objetivos generales

Se pretende que el profesorado en formación:

1. Sea capaz de detectar relaciones y patrones que permitan la formulación y comprobación de conjeturas matemáticas.
2. Diferencie entre razonamientos inductivos y deductivos, y comprenda su rol en la construcción y validación del conocimiento matemático.
3. Formule posibles razonamientos abductivos que puedan explicar y justificar conjeturas matemáticas, y comprenda el rol de los contraejemplos en la refutación de hipótesis sobre por qué una conjetura se cumple.
4. Construya, a partir de preguntas guiadas y cierta asistencia, una demostración de un resultado matemático.
5. Reconozca el potencial de GeoGebra como *software* de geometría dinámica para formular conjeturas y ponerlas a prueba, frente al uso de herramientas físicas de dibujo.
6. Reflexione sobre los procesos de conjeturar y demostrar y sobre la relación entre posibles comportamientos en estos procesos y los niveles de Van Hiele.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar la tarea, el profesorado en formación debe tener conocimientos sobre:

- ▶ La circunferencia y sus elementos: radio, diámetro, arco.
- ▶ Tipos de ángulos según su posición en la circunferencia: ángulo inscrito y ángulo central correspondiente.
- ▶ Construcción y medición de ángulos con útiles de dibujo y medición (regla, compás y transportador de ángulos).
- ▶ Ángulos adyacentes.
- ▶ Propiedades del triángulo isósceles y suma de ángulos del triángulo.
- ▶ Manejo básico del programa GeoGebra y de sus barras de herramientas (especialmente, construcción de puntos, segmentos y semirrectas; trazado y medición de segmentos y ángulos; dinamización de construcciones geométricas).
- ▶ Niveles de Van Hiele del desarrollo del razonamiento geométrico.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Esta tarea se situaría dentro de un tema sobre circunferencia y ángulos. Con anterioridad, deben haberse trabajado los tipos de ángulos según su posición en la circunferencia, pero no las relaciones angulares, puesto que, a lo largo de la tarea, se pretende construir la relación entre el ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente, que constituye la base de las relaciones de los demás tipos de ángulos (semiinscrito, interior y exterior).

Las actividades 1 a 4 están concebidas para ser desarrolladas de forma autónoma por el profesorado en formación: de manera individual, la actividad 1, y, en parejas, las actividades 2, 3 y 4. Quien dirige la formación debe revisar el desarrollo de la actividad en las diferentes agrupaciones: resolver posibles dudas del profesorado en formación, evitar avances excesivamente rápidos y poco reflexivos de los participantes (especialmente al responder a las preguntas), reforzar la atención en los momentos clave de las diferentes actividades, ofrecer orientación o pistas ante bloqueos o avances excesivamente lentos, y atender a los momentos de discusión de las parejas tanto en la formulación de la conjetura como en la búsqueda de posibles razones que la justifiquen, o no, durante la construcción de la demostración. Las actividades 2, 3 y 4 se sitúan en un entorno de GeoGebra Classroom a partir de los *applets* y guiones de tareas diseñados para cada una de ellas, por lo que quien dirige la formación puede usar el botón

«Pausar» para centrar la atención de todo el profesorado en formación y ofrecer orientaciones, resolver dudas o proponer reflexiones en gran grupo.

Entre las actividades 1 a 4 y la actividad 5 debe mediar un intervalo que permita a quien dirige la formación revisar, leer y analizar las respuestas del profesorado en formación y, a partir de estas, preparar la sesión de discusión, reflexión e institucionalización grupal que propone la actividad 5.

Las actividades 1 a 4 están previstas para una sesión de dos horas, de modo que el profesorado en formación pase a la siguiente actividad a medida que termine la anterior. La actividad 5 puede tener una duración variable, en función de cómo se hayan desarrollado las actividades anteriores.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Regla.
- ▶ Compás.
- ▶ Transportador de ángulos.
- ▶ Material de escritura y dibujo: bolígrafos, lápices y lápices de colores.
- ▶ Copias impresas de la hoja de trabajo de la actividad 1.
- ▶ Ordenador o *tablet* con conexión a internet para trabajar con los *applets* de GeoGebra y responder a los guiones de preguntas en el entorno de GeoGebra Classroom.

Actividad 1. Conjetura de la relación angular con material de dibujo y medición

Descripción

Antes de iniciar esta actividad, el profesorado en formación debe estar organizado en parejas (para las actividades 2 a 4), aunque la actividad 1 está diseñada para ser desarrollada individualmente. Los integrantes de cada pareja pueden contrastar o discutir sus avances y respuestas.

Quien dirige la formación entrega al profesorado en formación una hoja con el guion de preguntas correspondiente a la actividad 1. El objetivo es que el profesorado en formación pueda conjeturar la relación angular del ángulo inscrito a partir de la construcción de ejemplos mediante el uso de útiles y herramientas de dibujo y medición (regla, compás, transportador de ángulos) y reflexionar sobre su grado de convencimiento acerca de la conjetura y sobre si esta puede considerarse probada

o no en este momento. La actividad consta de distintas preguntas (véase la hoja de trabajo). Las preguntas 1.3, 1.4 y 1.5 se formularán del mismo modo en actividades posteriores de esta tarea formativa, con el objetivo de obtener información sobre los esquemas de prueba del profesorado en formación y su posible evolución. En ocasiones, las preguntas 1.3 y 1.4 se perciben como idénticas por el profesorado en formación, por lo que suele ser conveniente explicar el matiz que las diferencia: la 1.3 está vinculada con la percepción del grado de convencimiento sobre la veracidad de la conjetura, mientras que la 1.4 se refiere a si, desde un punto de vista matemático, se considera ya probado que la conjetura formulada es válida. Es decir, el profesorado en formación puede estar plenamente convencido de que la conjetura formulada es cierta, pero que considerar que aún no se ha probado matemáticamente.

Dado que en esta fase predomina el razonamiento inductivo (generalización de la conjetura a partir de ejemplos particulares, comprobación en otros posibles casos), conviene observar el número y la variedad de ejemplos que plantea el profesorado en formación (la pregunta 1.1 parece sugerir que hagan solo uno, pero pueden hacer cuantos consideren oportunos). Asimismo, conviene que las parejas pongan en común los ejemplos desarrollados individualmente por cada integrante para ampliar la base de casos sobre los que comprobar la conjetura.

Por otro lado, es importante atender a las posibles limitaciones que el profesorado en formación pueda verbalizar en relación con su grado de convencimiento y el carácter no probado de la conjetura, con especial atención a qué acciones propone para avanzar en su convencimiento o en la prueba. Esto resulta fundamental para detectar si el profesorado en formación manifiesta esquemas de prueba de tipo inductivo o si apunta hacia esquemas de prueba más cercanos a los de tipo axiomático.

Objetivos específicos

- ▶ Detectar relaciones o patrones que permitan la formulación de una conjetura matemática con material de dibujo y medición: la relación angular del ángulo inscrito.
- ▶ Reflexionar sobre el proceso de conjeturación efectuado, sobre el grado de convencimiento y sobre si la conjetura puede considerarse probada o no tras este proceso.

Orientaciones didácticas

Quien dirige la formación debe asumir un rol de supervisión y guía mientras el profesorado en formación desarrolla la actividad 1.1: revisar el trabajo realizado (recorriendo el aula), resolver posibles dudas y aclarar los enunciados de las preguntas, en particular, las preguntas 1.3 a 1.5 y el matiz que diferencia la 1.3 de la 1.4. En ese caso, puede ser interesante que esta diferenciación se comente de forma explícita ante toda la clase.

Actividad 2. Conjetura de la relación angular con GeoGebra

Descripción

La actividad 2 se desarrolla en parejas —las establecidas al inicio de la sesión— a través de un *applet* de GeoGebra que muestra un ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente. El profesorado en formación accede mediante un enlace a un guion de preguntas vinculado a la manipulación y dinamización del *applet*. Cada pareja debe disponer de un ordenador o *tablet* con conexión a internet para acceder a la página que contiene el *applet* y el guion de preguntas, e ir registrando sus respuestas en los espacios habilitados. Las respuestas han de ser consensuadas en pareja, lo que favorece además los procesos de comunicación y discusión.

El enlace de acceso es <https://www.geogebra.org/m/nnws6qwy>. Las preguntas son idénticas a las 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5, con una pregunta adicional sobre si la conjetura actual coincide o no con la que había obtenido el profesorado en formación en la actividad 1.

Dado que las actividades 2, 3 y 4 comparten un formato similar —enlaces a guiones de preguntas con *applets* de GeoGebra de apoyo—, se sugiere que quien dirige la formación cree un libro de GeoGebra con los enlaces correspondientes a las tres actividades, y habilite un aula en GeoGebra Classroom vinculada a dicho libro, de modo que las respuestas del profesorado en formación queden registradas de forma automática. Por otro lado, el entorno de GeoGebra Classroom ofrece un botón de «Pausar», que es muy útil para comentarios, aclaraciones o momentos de discusión en gran grupo, ya que pausa la interacción con el *applet* y permite centrar la atención del grupo.

Dado que el *applet* contiene la representación del ángulo inscrito y su central correspondiente, pero sin sus medidas explícitas, conviene que quien dirige la formación destaque la posibilidad de medir los ángulos con la herramienta «Ángulo» de GeoGebra, así como la de dinamizar la construcción para observar qué sucede. Esto permitirá además que el profesorado en formación aprecie las ventajas de GeoGebra para el proceso de conjeturación frente a lo desarrollado en la actividad 1. En este sentido, puede ser recomendable una breve puesta en común global al finalizar la actividad 2 para comparar ambas actividades y los recursos empleados, aunque este aspecto se retomará en la actividad 5.

Cabe esperar que el profesorado en formación compruebe la relación angular en un alto número de ejemplos, lo que les puede ayudar a convencerse de que la conjetura es válida. No obstante, como en el caso anterior, es importante atender a las respuestas de las preguntas 4 y 5, puesto que aportarán información sobre el esquema de prueba manifestado por las parejas participantes en este momento de la tarea formativa.

Objetivos específicos

- ▶ Detectar relaciones o patrones que permitan la formulación de una conjetura matemática con un *software* de geometría dinámica (GeoGebra): la relación angular del ángulo inscrito.
- ▶ Reflexionar sobre el proceso de conjeturación efectuado, sobre el grado de convencimiento y sobre el carácter probado o no de la conjetura tras este proceso.
- ▶ Reconocer el potencial de GeoGebra como *software* de geometría dinámica para formular conjeturas y ponerlas a prueba, frente al uso de herramientas físicas de dibujo.

Orientaciones didácticas

Se sugiere que quien dirige la formación asuma un rol de supervisión y de guía mientras las parejas del profesorado en formación desarrollan la actividad 2: revisar el trabajo realizado por el profesorado en formación (recorriendo el aula o a través del aula de GeoGebra Classroom en su ordenador), resolver posibles dudas y aclarar los enunciados de las preguntas. Además de lo ya comentado para la actividad 1, conviene insistir, con las parejas que no lo hayan hecho, en la medición explícita de los ángulos y la dinamización del *applet* de GeoGebra.

GeoGebra muestra la amplitud de los ángulos redondeada a dos decimales, lo que puede provocar que, en algunos casos, un valor no parezca exactamente la mitad (o el doble) del otro. El profesorado en formación puede advertir este hecho. Lo advierta o no, es interesante que quien dirige la formación lo tenga presente para preguntar al profesorado en formación qué puede estar ocurriendo en esos casos y explicar el criterio de redondeo que utiliza GeoGebra.

Actividad 3. Investigación sobre posibles hipótesis que justifiquen la conjetura

Descripción

Esta actividad forma parte de la transición desde la conjeturación hasta la prueba. Se espera que, tras las dos primeras actividades, todas las parejas hayan detectado y conjeturado la relación angular (la amplitud del ángulo inscrito es la mitad de la de su ángulo central correspondiente), aunque muchas parejas pueden haber indicado que consideran dicha relación ya justificada mediante el razonamiento inductivo (comprobaciones con la ayuda de GeoGebra), lo que revelaría un esquema de prueba inductivo. En esta actividad se pretende suscitar la necesidad de encontrar posibles

razones o hipótesis que pudieran explicar o justificar por qué la conjetura es válida, a modo de razonamientos abductivos, que puedan servir de base para construir (o no) un razonamiento deductivo.

En el enlace <https://www.geogebra.org/m/cvhdzfer> puede encontrarse la actividad 3. En esta actividad se han seleccionado dos posibles razones o hipótesis para que el profesorado en formación, mediante la dinamización del *applet* y la respuesta al guion de preguntas planteadas, puedan llegar a la conclusión de que ninguna de las dos razones o hipótesis resulta adecuada para construir a partir de ella un razonamiento deductivo. Ambas razones o hipótesis preceden de versiones previas de esta tarea formativa (véase Arce y Conejo, 2023, para el caso de la afirmación 1) y fueron planteadas por profesorado en formación como posibles razones que justifican el resultado:

- ▶ La afirmación 1 plantea que la relación angular puede estar determinada por la diferente distancia entre los vértices —del ángulo inscrito y central— y el arco que queda en el interior de ambos ángulos, como si existiera una proporción inversa entre esa distancia y la amplitud del ángulo: «La amplitud de un ángulo inscrito es la mitad que la del ángulo central correspondiente porque la distancia entre el vértice del ángulo inscrito y el arco de circunferencia contenido dentro de dicho ángulo es el doble que la distancia entre el vértice del ángulo central correspondiente al ángulo inscrito y dicho arco».
- ▶ La afirmación 2 plantea que la relación angular puede justificarse por el hecho de que ambos ángulos comparten el arco de circunferencia que queda en su interior: «La amplitud de cualquier ángulo que comprenda el mismo arco de circunferencia que un ángulo central será la mitad que la amplitud de dicho ángulo central».

En ambos casos se pregunta inicialmente si el profesorado en formación considera cierta o no cada afirmación y, posteriormente, con ayuda de un *applet* específico en cada caso, se plantean cuestiones que pretenden guiar al profesorado en formación para encontrar contraejemplos: en el caso de la afirmación 1, mostrar que la distancia del vértice del ángulo inscrito al arco no siempre es el doble del radio (que es la distancia del vértice del ángulo central al arco); en el caso de la afirmación 2, comprobar que, al desplazar el vértice V fuera de la circunferencia, la amplitud del ángulo deja de ser la mitad de la del central correspondiente, que se mantiene fija si no se mueven A y B . A partir de estos contraejemplos, se espera que el profesorado en formación concluya que ambas afirmaciones son falsas, y reconozca el rol de los contraejemplos en matemáticas para refutar posibles hipótesis que pretendan justificar una conjetura. Para reforzar esta idea, y a modo de reflexión final de la actividad, se plantean las siguientes dos preguntas:

- ▶ Sin referirte a lo trabajado en las afirmaciones 1 y 2, sino intentando pensar en términos generales, ¿qué proceso seguiste para verificar el cumplimiento (o incumplimiento) de las proposiciones?

- ▶ ¿Qué grado de convencimiento tienes sobre la veracidad de las afirmaciones 1 y 2? ¿Consideras que ese grado de convencimiento podría mejorarse? En tal caso, ¿cómo lo harías?

Durante el desarrollo de esta fase, es recomendable que quien dirige la formación destaque inicialmente el propósito de la actividad (estudiar dos posibles hipótesis que podrían explicar y justificar la relación angular conjeturada) para focalizar la atención del profesorado en formación. Además, si se observa que el profesorado en formación no está haciendo uso del *applet* para responder a las preguntas, conviene que quien dirige la formación señale la existencia de herramientas que pueden ser útiles para comprobar distancias (construcción de segmentos, herramienta «Distancia o longitud») y la posibilidad de dinamizar los puntos V, A y B (en el segundo *applet*, el punto V no está vinculado como punto de la circunferencia).

No sería extraño que alguna de las razones recogidas en las afirmaciones 1 y 2 hayan sido formuladas por el profesorado en formación durante las actividades 1 o 2, en las preguntas 4 y 5. En ese caso, es especialmente interesante que quien dirige la formación monitorice qué hacen estas parejas durante el desarrollo de la actividad 3, puesto que deberían refutar las hipótesis que formularon previamente.

En el caso de que se disponga de un tiempo algo más reducido para la primera sesión de la tarea formativa, se aconseja que, en esta actividad 3, quien dirige la formación seleccione solo una de las dos afirmaciones, preferiblemente aquella que haya surgido como posible razón por parte del profesorado en formación en estadios previos de la tarea formativa.

En el caso de la afirmación 2, es importante que el profesorado en formación sea consciente de que V, el vértice, no está fijado como un punto de la circunferencia, por lo que puede desplazarse a lo largo de todo el plano. Pudiera darse la circunstancia de que el profesorado en formación desplace V intentando mantenerlo sobre la circunferencia y comprobando si se cumple o no la relación angular, y que encuentre aparentes contraejemplos no de la afirmación 2, sino de la propia relación angular (en casos en que V parece estar sobre la circunferencia, pero realmente no lo está). Si esto sucede, puede sugerirse que utilice la herramienta «Aproximar» para verificar que V no está sobre la circunferencia, o que, si desea dinamizar el vértice sin que se salga de la circunferencia, cree directamente un punto sobre la circunferencia y construya el ángulo inscrito a partir de él.

Objetivos específicos

- ▶ Enunciar posibles razonamientos abductivos que puedan explicar y justificar conjeturas matemáticas.
- ▶ Comprender el rol de los contraejemplos en la refutación de posibles hipótesis sobre por qué una conjetura se cumple.

Orientaciones didácticas

Además de lo ya comentado para las actividades anteriores, conviene enfatizar inicialmente el propósito de la actividad y, si es necesario, insistir en el aprovechamiento de los *applets*, como se ha sugerido.

Actividad 4. Construcción de una justificación del teorema del ángulo inscrito

Descripción

La actividad 4 y el guion de preguntas que la componen se recoge en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/ncs9yfv8>

Esta actividad comienza con una pregunta que pretende continuar con el proceso de transición de la conjeturación a la prueba de la relación angular. Tras la actividad 3, en la que se ha pretendido refutar dos posibles hipótesis que podrían explicar y justificar la relación angular, se plantean las siguientes preguntas para recoger otras posibles hipótesis que formule el profesorado en formación y reforzar la necesidad del razonamiento deductivo en matemáticas:

- ▶ Explica por qué crees que la conjetura de que la amplitud del ángulo inscrito es la mitad de la amplitud de su ángulo central correspondiente es cierta. ¿Qué relaciones entre ambos ángulos crees que pueden propiciar que esa conjetura se cumpla siempre?

A continuación, se aborda la fase de prueba de la relación angular. La demostración del teorema del ángulo inscrito se basa en las tres posiciones posibles del centro de la circunferencia respecto al ángulo inscrito: sobre uno de sus lados, en su interior o en su exterior. El caso más sencillo, a partir del cual pueden deducirse los otros dos, es aquel en que el centro está sobre uno de los lados del ángulo inscrito.

Para abordar este primer caso, el *applet* muestra el ángulo inscrito y su central correspondiente, con la instrucción de colocar uno de los lados de modo que el centro de la circunferencia quede sobre él. Se plantean una serie de preguntas destinadas a movilizar el conocimiento matemático necesario para demostrar la relación en este caso, con la ayuda del *applet* y la representación. Las preguntas son las siguientes:

- ▶ Observa el triángulo VOB. ¿Cómo es este triángulo según sus lados y por qué (razona sin recurrir a medir los lados)? ¿Cuál es la amplitud de los tres ángulos del triángulo VOB (razona sin medirlos)? ¿Qué relación hay entre los ángulos del

triángulo VOB y el ángulo central correspondiente? Utiliza esta información para construir una justificación para tu conjetura.

Las indicaciones entre paréntesis pretenden evitar que el profesorado en formación recurra a mediciones directas sobre el *applet* y busque, en cambio, razonamientos deductivos a partir de la configuración. Este hecho puede resultar confuso para aquellos que tengan un esquema de prueba inductivo arraigado. En estos casos, conviene que quien dirige la formación encamine al profesorado en formación para que trate de responder a las preguntas a partir de la configuración general y evite el uso de las herramientas de medición de segmentos o de ángulos. Otro comportamiento habitual es responder de manera más o menos correcta a las preguntas, pero no ser capaz de usar esa información para construir una conjetura, bien porque no entienda qué se pide, bien porque encuentre dificultades para construir la cadena lógica de razonamientos. Ante esta situación, quien dirige la formación puede orientar al profesorado en formación en la construcción de la justificación destacando las implicaciones y los conectores lógicos necesarios.

Tras este caso, se plantea la justificación de los otros dos a partir de lo demostrado. Para ello, los *applets* incorporan, con línea de puntos, el diámetro que une los centros de los ángulos, para ayudar a visualizar cómo aplicar el caso anterior. La instrucción que se indica es la siguiente: «¿Qué sucede en este caso? Construye una justificación para tu conjetura en este caso apoyándote en el caso anterior y en la línea auxiliar de trazos». Un comportamiento posible al realizar estas tareas puede ser que, en lugar de intentar aplicar el caso anterior, el profesorado en formación intente reproducir la demostración previa buscando un triángulo isósceles a partir del cual razonar. En estos casos, quien dirige la formación puede señalar una de las funciones de la demostración: que un resultado ya justificado puede ser aplicado directamente en otras situaciones.

Concluida la construcción de la demostración, para detectar posibles avances o cambios en los esquemas de prueba, se vuelven a plantear las preguntas 3 y 4 de las actividades 1 y 2.

Como cierre de esta actividad 4, se presenta un *applet* con una circunferencia y un triángulo inscrito en el que uno de los lados es el diámetro de la circunferencia. Se pide justificar por qué el ángulo en C es recto (mediante la aplicación del teorema del ángulo inscrito) y cómo podemos construir triángulos rectángulos a partir de la hipotenusa.

Objetivos específicos

- ▶ Diferenciar entre razonamientos de tipo inductivo y razonamientos de tipo deductivo, y comprender su rol para construir y validar el conocimiento matemático.
- ▶ Construir, a partir de preguntas guiadas y cierta asistencia, una demostración de un resultado matemático.

Orientaciones didácticas

En la actividad 4 es frecuente que surjan muchas dudas y dificultades en el profesorado en formación, sobre todo en la construcción de las demostraciones, por lo que conviene una supervisión continua. Puede hacerse uso de pausas para ofrecer orientaciones generales, pistas o resolver dudas recurrentes vinculadas al desarrollo del proceso.

Actividad 5. Discusión e institucionalización de lo realizado

Descripción

Esta actividad se realiza en una sesión posterior y su propósito es la reflexión e institucionalización del trabajo de las actividades previas. También se plantea la relación de algunos aspectos con el conocimiento didáctico vinculado a la tarea.

Para poder organizar esta fase de reflexión e institucionalización, es necesario que quien dirige la formación haya leído y revisado previamente las respuestas de las diferentes parejas a las actividades 1 a 4, a fin de analizar el desarrollo de los procesos de conjeturación, el estudio de posibles hipótesis para validar la conjetura y la demostración de la relación angular del ángulo inscrito, así como los esquemas de prueba que manifiesta el profesorado en formación y los posibles cambios que puedan percibirse en el transcurso de la primera sesión de la tarea formativa. Toda esa información ha de servir de apoyo en varios sentidos:

- ▶ En la organización de los grupos mediante la fusión de parejas que hayan mostrado diferencias en su comportamiento susceptibles de enriquecer las discusiones en las fases grupales de la actividad.
- ▶ En la selección de posibles fragmentos de respuestas sobre los que discutir y reflexionar en relación con el conocimiento y la comprensión de los diferentes procesos de conjeturación y demostración llevados a cabo durante la tarea formativa.

La actividad 5 alternará momentos de reflexión en pequeños grupos —preferiblemente de cuatro personas mediante la fusión de dos de las parejas establecidas durante las actividades 1 a 4— con momentos de puesta en común en gran grupo e institucionalización de los diferentes aspectos abordados. La reflexión e institucionalización en esta actividad 5 ha de abarcar los aspectos que se recogen a continuación. Se añaden, en cada aspecto, posibles preguntas que quien dirige la formación puede tomar como referencia para el desarrollo de estos momentos de reflexión e institucionalización:

- ▶ Identificación, en las actividades 1 a 4, de los procesos de conjeturación y demostración como ejes principales de la construcción de enunciados matemáticos. Posibles preguntas: «¿Qué momentos de la tarea están vinculados con la conjeturación de la relación y por qué? ¿Qué momentos de la tarea están vinculados con la demostración de la relación conjeturada y por qué?».
- ▶ Relación de las actividades 1 a 4 con los diferentes tipos de razonamiento en matemáticas (abductivo, inductivo y deductivo), y el rol de cada uno en la tarea formativa desarrollada. Posibles preguntas: «¿En qué momentos de la tarea se pretende encontrar posibles razones o hipótesis que puedan explicar o justificar la conjetura (razonamiento abductivo)? ¿En qué momentos de la tarea se pretende comprobar en ejemplos si la conjetura se cumple (razonamiento inductivo)? ¿En qué momentos de la tarea se pretende construir una cadena lógica de razonamiento que permita validar la conjetura (razonamiento deductivo)? ¿Qué aporta cada uno de estos momentos en el proceso global de construcción del conocimiento matemático?».
- ▶ Diferenciación entre estar convencido de algo (como algo más vinculado a una creencia o concepción personal) y que ese algo esté matemáticamente demostrado (como algo vinculado a los procesos de generación de conocimiento en matemáticas). Se sugiere seleccionar fragmentos de respuestas dadas a las preguntas finales de la actividad 2 (donde se aprecien diferentes niveles de convencimiento o percepciones sobre si la conjetura está suficientemente probada), para su discusión por parte del profesorado en formación a partir de las siguientes preguntas: «¿Es lo mismo estar convencido de que algo es cierto que esté probado que es cierto? ¿Qué momentos de la tarea contribuyen a generar convencimiento sobre la veracidad de la conjetura? ¿Qué momentos de la tarea contribuyen a generar una prueba de la conjetura?».
- ▶ Rol de los contraejemplos como medio para rechazar hipótesis que pretendan explicar o justificar una conjetura. Se sugiere seleccionar fragmentos de las respuestas que hayan dado las parejas a las preguntas reflexivas finales de la actividad 3. Pregunta: «¿Qué debe hacerse para rechazar una posible hipótesis o razón que pretenda explicar o justificar la conjetura?».
- ▶ Proceso de construcción de una demostración aplicando el razonamiento deductivo (tomando como ejemplo el proceso seguido en la actividad 4 para el teorema del ángulo inscrito). Se sugiere revisar la justificación del teorema: contestar primero a las preguntas guiadas y, a partir de esa información, orientar la construcción de la prueba. Después se pueden plantear las siguientes preguntas: «¿Qué características tiene un razonamiento de tipo deductivo? ¿Qué implicaciones tiene demostrar un resultado?».
- ▶ Reflexión sobre las potencialidades y limitaciones de diferentes recursos (lápiz y papel o *software* de geometría dinámica GeoGebra) para desarrollar un proceso de conjeturación y demostración de enunciados geométricos. Posibles preguntas: «¿Qué aportan recursos como el lápiz y papel o un *software* de geometría

dinámica como GeoGebra a las actividades 1 y 2? ¿Qué ventajas ofrece GeoGebra frente al lápiz y papel? ¿Qué aportan y qué no aportan estos recursos al proceso de demostración del resultado?».

- ▶ Reflexión sobre el potencial del *software* de geometría dinámica GeoGebra para su uso en un aula de Educación Primaria en los procesos de construcción de enunciados y relaciones geométricas. Posibles preguntas: «Como docente en un aula de Educación Primaria, ¿para qué puedo utilizar un *software* de geometría dinámica como GeoGebra? ¿Con qué propósitos? Proporciona ejemplos concretos de forma razonada».
- ▶ Vinculación de los niveles de Van Hiele de desarrollo del razonamiento geométrico con el comportamiento esperado en las diferentes etapas de la tarea formativa (actividades 1 a 4). Conviene seleccionar fragmentos de respuestas que ilustren comportamientos propios de los diferentes niveles de Van Hiele (especialmente el nivel 2, *análisis*, y el nivel 3, *deducción informal*). Pregunta: «¿En qué nivel de Van Hiele de desarrollo del razonamiento geométrico encaja cada respuesta? Razona tu respuesta».
- ▶ Creación de posibles respuestas hipotéticas al desarrollo de la tarea formativa que podrían dar estudiantes situados en el nivel 2 (análisis) o en el nivel 3 (deducción informal).

Objetivos específicos

- ▶ Diferenciar entre razonamientos de tipo inductivo y razonamientos de tipo deductivo, y comprender su rol para construir y validar el conocimiento matemático.
- ▶ Construir, a partir de preguntas guiadas y cierta asistencia, una demostración de un resultado matemático.
- ▶ Reconocer el potencial de GeoGebra como *software* de geometría dinámica para formular conjeturas y ponerlas a prueba, frente al uso de herramientas físicas de dibujo.
- ▶ Reflexionar sobre los procesos de conjetura y demostración, y sobre la relación entre posibles comportamientos en dichos procesos y los niveles de Van Hiele de desarrollo del razonamiento geométrico.

Orientaciones didácticas

Se espera que quien dirige la formación adquiera un rol de dinamizador de la sesión: proponga preguntas o fragmentos para discutir en los diferentes momentos de la sesión (primero en grupos de cuatro, luego en gran grupo) y seleccione, en el caso de las intervenciones en gran grupo, qué grupos intervienen, de modo que se muestre la diversidad de respuestas y se avance en la institucionalización de los conocimientos fundamentales de la tarea.

Referencias

- Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.
- Arce, M. y Conejo, L. (2023). Comportamientos de estudiantes para maestro al enunciar razonamientos abductivos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 139-146). SEIEM.
- Arzarello, F. (2008). The proof in the 20th century. En P. Boero (ed.), *Theorems in school: From history to epistemology and cognition to classroom practices* (pp. 43-64). Sense. https://doi.org/10.1163/9789087901691_005
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D. y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57-69). Dykinson. <http://doi.org/10.14679/1454>
- Dreyfus, T. (2017). What are solid findings in mathematical education? En T. Dooley y G. Gueudet (eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 57-62). DCU Institute of Education; ERME.
- Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Information Age.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (coords.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Alfar.
- Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles and task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 305-325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13

- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.
- Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.40.3.0314>

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 9.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
			1	2	3	4	5
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Relación angular del ángulo inscrito: la amplitud del ángulo inscrito es la mitad de la de su ángulo central correspondiente.	X	X			
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos				X	X
		Teorema del ángulo inscrito: la amplitud del ángulo inscrito es la mitad de la de su ángulo central correspondiente.				X	X
		Demostración del teorema del ángulo inscrito en los tres casos.				X	X
		Propiedades	Construcción del ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito.	X			
	Registros de representación	Representación de ángulos inscritos y sus ángulos centrales correspondientes con útiles de dibujo.	X				
		Visualización del ángulo inscrito y su central correspondiente en diversos ejemplos y posiciones con la ayuda de GeoGebra.	X	X			
Fenomenología y aplicaciones	Segundo teorema de Tales (como aplicación del teorema del ángulo inscrito): Dado un diámetro de la circunferencia, el triángulo formado al unir cualquier punto de esta con los extremos del diámetro es rectángulo.				X		
KSM	Conexiones de complejización	Relación entre los radios de la circunferencia y la caracterización de triángulos isósceles inscritos en ella.				X	
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KPM	Formulación de una conjetura a partir de la observación y comprobación de relaciones y patrones en ejemplos particulares.	X	X			
		Rol del razonamiento inductivo para generar convencimiento sobre la conjetura y analizar si puede considerarse probada o no.	X	X			
		Ventajas de un <i>software</i> de geometría dinámica como GeoGebra, frente al lápiz y papel, en el proceso de formulación y comprobación de una conjetura.	X				

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades					
			1	2	3	4	5	
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KPM	La práctica de demostrar	Necesidad de proponer hipótesis que pudieran explicar y justificar por qué un enunciado matemático es cierto (como base de razonamientos deductivos).			X	X	
			Rol de los contraejemplos en la refutación de posibles hipótesis que pretendan explicar y justificar un enunciado matemático.			X		
			Rol del razonamiento deductivo en la validación de las conjeturas.				X	
			Construcción de una demostración en matemáticas.			X	X	
			Funciones de la demostración: verificación, explicación, posibilidad de aplicar el teorema.			X	X	
			Etapas de conjeturación y demostración en la construcción de enunciados matemáticos.					X
			Rol del razonamiento abductivo, inductivo y deductivo en el proceso de conjeturación y demostración de enunciados matemáticos.					X

Tabla 9.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades					
			1	2	3	4	5	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KMT	Recursos didácticos (físicos o digitales)	Potencialidades y limitaciones de recursos como el material de dibujo o GeoGebra para desarrollar procesos de conjeturación en el aula.	X				X
			Potencial de las tareas basadas en <i>applets</i> de GeoGebra para conjeturar y comprobar enunciados geométricos, y posibilidades de aplicación en un aula de Primaria.				X	
	KFLM	Teorías sobre aprendizaje	Relación entre las características de los niveles de Van Hiele y el razonamiento requerido en las diferentes actividades de la tarea formativa (comprobación empírica, necesidad de razonamiento deductivo, construcción de la demostración).					X
			Fortalezas y debilidades	Concepción errónea —habitual y persistente— de que el razonamiento inductivo permite validar conocimiento en matemáticas (persistencia de esquemas de prueba de tipo inductivo).				

Hojas de trabajo

Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia

ACTIVIDAD 1. Conjetura de la relación angular con material de dibujo y medición

A continuación, se proponen una serie de actividades basadas en los ángulos sobre la circunferencia. Tómate tu tiempo para elaborar las respuestas, coméntalas con tu compañero cuando lo consideres necesario y no dudes en consultar las dudas que te surjan.

- 1.1. Construye una circunferencia con el compás y marca el centro. Dibuja un ángulo inscrito con ayuda de la regla y construye su ángulo central correspondiente.

- 1.2. ¿Existe alguna relación entre la amplitud del ángulo inscrito y la de su ángulo central correspondiente? Enuncia una conjetura que exprese dicha relación.

- 1.3. ¿En qué grado estás convencido (estás seguro de que es así) de que la conjetura formulada es cierta? ¿Por qué?

1.4. ¿Crees que está suficientemente probado que la conjetura es cierta? ¿Por qué?

1.5. Si crees que podrías estar más convencido o que la conjetura podría probarse mejor, ¿qué habría que hacer para lograrlo?

10. ¿Dónde están los polígonos en los poliedros?

Ivonne Sandoval

<http://orcid.org/0000-0002-7269-8546>

Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco (México)

Emma Carreño

<https://orcid.org/0000-0002-9785-6133>

Universidad de Piura (Perú)

Formación inicial y continua

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria o Profesorado de Matemáticas de Secundaria

Duración aproximada de la aplicación: 6 horas

Fundamentación

La geometría es un área fundamental de las matemáticas presente en todos los currículos de la educación básica, como es el caso de Perú (Ministerio de Educación de Perú, 2016) y de México (Secretaría de Educación Pública en México —SEP, 2017, 2024a, 2024b—). Su relevancia también se destaca en los estándares propuestos por el National Council of Teachers of Mathematics (2000), donde los contenidos geométricos mantienen una presencia sostenida a lo largo de los distintos grados escolares, en mayor medida que otros contenidos como los de medida o análisis de datos y probabilidad.

El estudio de la geometría se vincula con modelar objetos mediante formas geométricas, comunicar la comprensión que se tiene de estas y desarrollar la orientación espacial (Ministerio de Educación de Perú, 2016). Estas capacidades requieren que, desde los primeros años escola-

res, se fomente la visualización: que el alumnado imagine objetos, los manipule mentalmente y realice acciones sobre objetos concretos. Esta experiencia le permite establecer relaciones y propiedades geométricas para, posteriormente, poder articularlas de manera más formal mediante el lenguaje geométrico correspondiente (SEP 2024a, 2024b).

El abordaje de tareas formativas centradas en tópicos como polígonos, prismas y pirámides se sustenta en investigaciones recientes. Por ejemplo, Lo y Cox (2018) destacan lo complejo que resulta para los futuros profesorado de Primaria desarrollar actividades de composición y descomposición de formas tridimensionales, proceso clave para el desarrollo de conceptos de medición. Además, señalan la complejidad de clasificar formas tridimensionales a partir del conocimiento de figuras simples, y el potencial de la construcción de definiciones para desafiar y refinar imágenes conceptuales del profesorado en formación. En esta línea, Herawati *et al.* (2022) subrayan la importancia de los elementos y propiedades de los polígonos como base para abordar temas más complejos. Según estos autores, es crucial enseñar los conceptos de forma jerárquica, ya que el alumnado suele presentar dificultades para describir las características de un objeto geométrico, dado que el desarrollo conceptual en geometría requiere habilidades de visualización y experiencias concretas, especialmente en los primeros años escolares.

Las consideraciones anteriores justifican las tareas formativas que se proponen en este capítulo. Estas buscan atender las demandas identificadas por Lo y Cox (2018), entre ellas, la necesidad de explorar la construcción de sólidos tridimensionales para comprender la naturaleza de las dificultades del profesorado en formación, así como la de diseñar e implementar sesiones formativas centradas en estos tópicos. Además, el estudio de formas geométricas en diversas dimensiones constituye una línea de investigación vigente, en la que el uso de analogías parece ser una estrategia prometedora para establecer relaciones, identificar diferencias y enriquecer la comprensión geométrica (Jones y Tzekaki, 2016; Sinclair y Bruce, 2015).

Objetivos generales

Se pretende que el profesorado en formación:

1. Reconozca elementos y características de cuerpos geométricos traslúcidos y opacos, y establezca relaciones y diferencias con respecto a las figuras geométricas planas.
2. Reflexione sobre las implicaciones de las prácticas matemáticas de definir y de clasificar en geometría, mediante la construcción de de-

finiciones diversas de un mismo objeto geométrico y clasificaciones basadas en distintos criterios simultáneamente.

3. Analice errores y dificultades de aprendizaje que puedan surgir en el aula al estudiar los cuerpos geométricos en los primeros grados de Primaria, con el fin de tomar conciencia del proceso de aprendizaje de estos contenidos.
4. Evalúe las potencialidades y limitaciones de diversas actividades de enseñanza de poliedros y de los recursos didácticos asociados, con vistas a incorporarlas —con los ajustes pertinentes— en las planificaciones de clase.
5. Reflexione sobre los aspectos que conforman el conocimiento especializado necesario para la enseñanza de la geometría en Educación Primaria.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar adecuadamente esta tarea, el profesorado en formación debería poseer conocimientos sobre:

- ▶ Definición verbal e imagen conceptual de polígono, prisma y pirámide.
- ▶ Clasificación de polígonos.
- ▶ Representaciones gráficas prototípicas de polígonos, prismas y pirámides.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Se propone desarrollar esta tarea en tres sesiones. La primera, con una duración aproximada de dos horas, se centrará en los objetivos primero, tercero y cuarto, mediante las actividades 1 y 2, que implican el análisis de una experiencia de aula sobre cuerpos geométricos. La segunda sesión, correspondiente a la actividad 3, abordará el análisis de definiciones y clasificaciones de cuerpos geométricos, con el propósito de construir conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares. La tercera y última sesión, compuesta por las actividades 4 y 5, tiene como propósito socializar los conocimientos movilizados en la segunda sesión y presentar el modelo MTSK como una herramienta de metarreflexión sobre el conocimiento especializado del profesorado.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Hojas de trabajo.
- ▶ 15 palitos del mismo tamaño.
- ▶ Una barrita de plastilina.
- ▶ Un pliego de papel para rotafolio (papel bond, papelógrafo o papel sábana).
- ▶ Tres marcadores (rotuladores o plumones) de punta gruesa: negro, azul y verde.
- ▶ Notas adhesivas o tarjetas.
- ▶ Cinta adhesiva.

Actividad 1. Conocimiento sobre cubo y cuadrado

Descripción

Esta actividad gira en torno al diálogo entre dos estudiantes y su maestra sobre las características comunes y diferenciadoras del cubo y del cuadrado. Se propone que el profesorado en formación interprete el conocimiento puesto en juego por la maestra y el alumnado.

Orientaciones didácticas

Después de entregar la ficha de trabajo, se recomienda iniciar con una lectura del extracto de la clase. Se invita al grupo a analizar el conocimiento que tiene (o parece tener) la maestra, es decir, ¿qué sabe (o parece saber) la maestra y en qué frase o acción se evidencia? Algunas preguntas orientadoras podrían ser: «¿Qué sabe (o parece saber) la maestra sobre la diferencia entre un objeto 3D y una figura plana (2D)?, ¿qué frase o acción evidencia ese conocimiento?». Al usar el material concreto (un cubo y un cuadrado): «¿Qué conocimiento permite reconocer en ella?». Para aprovechar las respuestas de los alumnos: «¿Qué más podría extraerse del diálogo?».

En la pregunta 1.2, el foco se traslada al conocimiento de los estudiantes. Se invita al profesorado en formación a reflexionar sobre la información que aportan las respuestas del alumnado a la maestra. Conviene recordar al profesorado en formación que el análisis se centra en diferenciar 2D y 3D. Algunas preguntas orientadoras: «¿Qué parece estar imaginando o relacionando el estudiante al usar el término *aplastado*?, ¿cómo interpretar expresiones como "le echan aire y se hace más grande"?». Conviene insistir en que anote todas las ideas que surjan, ya que servirán de material para futuras discusiones.

Actividad 2. Construcción de una pirámide con palillos y plastilina

Descripción

Esta actividad se basa en una propuesta tomada de un libro de texto sobre pirámides de distinta base poligonal. A partir de la experiencia de construcción realizada por una pareja de estudiantes de Primaria, se analizan sus conocimientos geométricos y las dificultades que enfrentan. La sesión concluye con la solicitud de materiales para el desarrollo de la siguiente sesión.

Orientaciones didácticas

Con el grupo completo, se lee la actividad 2. Conviene que quien dirige la formación aproveche para aclarar la numeración de las tres construcciones con palillos. Después, cada equipo completa las preguntas 2.1 y 2.2 de la hoja de trabajo. En la pregunta 2.2 (¿cuál de las construcciones implicaría un reto mayor para el alumnado?), se anima a los equipos a reconstruir cada pirámide para observar diferencias en cuanto a número de palillos (longitudes), cantidad de plastilina necesaria y estabilidad de la estructura. Conviene que quien dirige la formación propicie la siguiente discusión: «En este tipo de representaciones, ¿qué elementos se identifican claramente y cuáles no?; ¿puede el alumnado reconocer *claramente* la forma de las caras?, ¿por qué sí o por qué no?».

La subactividad 2.3 presenta la dificultad con que se encuentra un equipo al interpretar una representación 2D de un objeto 3D. La primera pregunta busca que el futuro profesorado identifique cuál de las tres construcciones propuestas en el libro fue reproducida y justifique su elección. Esto lo invita a interpretar la respuesta del alumnado y a reflexionar sobre lo que sabe acerca del aprendizaje relacionado con el cambio de dimensión.

La subactividad 2.4 ilustra un proceso de interpretación y reconstrucción realizado por otro equipo de estudiantes para la pirámide pentagonal. Este proceso incluye tres intentos, documentados en fotografías. El profesorado en formación debe completar una tabla —producto de sus reflexiones sobre los procesos seguidos por este equipo de estudiantes— en la que describa las acciones realizadas en cada intento, identifique posibles ideas geométricas puestas en juego (por ejemplo, reconocimiento de figuras cerradas, número de lados, analogías entre elementos de polígonos y poliedros como lado-arista, vértice 2D-vértice 3D, ángulos 2D y 3D) y analice las posibles dificultades encontradas (por ejemplo, interpretación de una representación 2D de un objeto 3D, imaginar el objeto 3D para saber si las aristas se cruzan o no, estabilidad de la estructura o comprensión de analogías entre polígonos y poliedros).

Otro de los aspectos en los que se espera que el futuro profesorado preste atención es el papel de los recursos seleccionados en una clase. La subactividad 2.5

invita a reflexionar sobre si algunas de las dificultades observadas podrían estar relacionadas con las características del material empleado (palillos iguales, peso de la plastilina, estabilidad de la estructura, entre otras). Esta reflexión permite vincular el análisis geométrico con decisiones de planeación.

Para finalizar la sesión, se organiza la clase en equipos (2-3 integrantes) y se asigna a cada equipo un tema de la tabla 10.1, de modo que al menos dos equipos trabajen cada uno.

Tabla 10.1. Temáticas para asignar a los equipos.

Temática	Posibles énfasis	
Prismas	Definición	Clasificación
Pirámides	Definición	Clasificación

Para la siguiente sesión, quien dirige la formación solicita a cada equipo recopilar documentos de consulta que informen sobre aspectos matemáticos, didácticos y curriculares de la temática asignada. De manera individual, cada integrante debe revisar el material recopilado, identificar conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares necesarios para que el profesorado de segundo de Primaria aborde adecuadamente ese contenido, y registrar sus hallazgos junto con la referencia correspondiente.

Conviene explicar que estas anotaciones servirán de material para la siguiente sesión. Además, se solicita a cada equipo que lleve un pliego de papel para rotafolio (papel bond, papelógrafo o papel sábana) y tres marcadores (rotuladores o plumones) de punta gruesa y colores distintos (por ejemplo, negro, azul y verde).

Actividad 3. Reflexionar sobre la enseñanza de poliedros con el uso de componentes del MTSK como herramienta para la planificación de clases

Descripción

Esta actividad consta de tres subactividades que se desarrollan en equipos de 2-3 personas. El tema de trabajo son los poliedros (prismas y pirámides), con dos énfasis asignados en la sesión anterior: definición y clasificación. Cada equipo aborda un tema con un énfasis a partir de la indagación documental.

En la subactividad 3.1, cada equipo sistematiza, de manera coherente y sintética, los conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares relacionados con su tema, y elabora un cartel para presentarlo al grupo.

En la subactividad 3.2, el equipo asume el rol docente y elabora una planificación esquemática para una clase de una hora, en la que decide qué se enseñará y cómo se abordará.

En la subactividad 3.3 se analiza ese primer diseño de clase mediante preguntas guiadas, orientadas a reflexionar sobre componentes del modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo *et al.*, 2018) como herramienta para la planificación de clase.

Orientaciones didácticas

Conviene comenzar con una serie de indicaciones para el trabajo en equipo, especialmente sobre la importancia de compartir los hallazgos individuales obtenidos de la revisión documental. Después, se les pide elaborar, en su portafolio, una tabla (como la del ejemplo de la hoja de trabajo) que permita diferenciar conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares.

Una vez terminada esta actividad, quien dirige la formación solicita que el profesorado diseñe una secuencia de actividades sobre el tema asignado, pensada para segundo grado de Primaria. Conviene promover la reflexión colectiva sobre las decisiones tomadas. Para orientar la planificación se sugieren algunos apartados. Conviene recordar que disponen de media hora, por lo que no se espera una propuesta minuciosa, sino un primer esbozo de ideas.

Una vez terminado el primer diseño, las subactividades 3.3 a 3.8 buscan propiciar la reflexión crítica sobre esas decisiones, con foco en el contenido y la didáctica. Conviene que quien dirige la formación fomente tanto la discusión como la escritura, ya que esta última ayuda a precisar ideas y a profundizar en la reflexión.

Si algún equipo concluye antes de lo previsto, puede comenzar la siguiente actividad y completarla en casa.

Para la siguiente sesión, se solicita a cada equipo que prepare en papel de rotafolio un esquema de los conocimientos identificados en la sesión anterior: negro para los conocimientos matemáticos, azul para los curriculares y verde para los didácticos, según la temática asignada (prismas o pirámides) y el énfasis indicado (definición o clasificación), e indicar las relaciones entre estos conocimientos en caso de haberlas. También se les solicita traer nuevamente los marcadores de punta gruesa (rotuladores o plumones) de colores (negro, azul y verde), así como notas adhesivas o tarjetas que les permitan añadir información en el rotafolio, y cinta adhesiva.

Finalmente, se asigna a cada equipo la lectura de uno de los siguientes informes de investigación, según su temática, para trabajarla antes de la siguiente sesión. Si se considera conveniente, se les puede pedir que formulen dos preguntas a partir de la lectura.

- ▶ Temática Prismas: Escudero-Domínguez, Muñoz-Catalán y Carrillo (2021).
- ▶ Temática Pirámides: Escudero-Domínguez, Muñoz-Catalán y Montes (2021).

Actividad 4. Explicitar el conocimiento especializado de los poliedros

Descripción

Durante esta tercera sesión se socializan los esquemas elaborados en la sesión anterior sobre los conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos.

Orientaciones didácticas

Quien dirige la formación organiza los equipos por temática compartida y les pide que coloquen sus producciones juntas en una de las paredes del aula. Conviene promover el intercambio de hallazgos, destacando similitudes y diferencias. Se les indica que elijan una de las hojas de rotafolio que represente la temática. Si detectan elementos incompletos o poco claros, pueden enriquecerlos con las notas adhesivas o las tarjetas. Quien dirige la formación pide a cada equipo que designe a una o dos personas para presentar el trabajo.

Para la plenaria, pueden organizarse visitas a cada una de las cuatro paredes del aula. En cada estación, los equipos disponen de diez minutos para presentar sus esquemas temáticos.

Actividad 5. Explicitar el conocimiento especializado sobre los poliedros

Descripción

Esta actividad tiene como propósito organizar y sistematizar el conocimiento matemático abordado en sesiones anteriores, con el modelo MTSK como esquema organizador.

Orientaciones didácticas

Durante los últimos 50 minutos de la sesión, quien dirige la formación dedica un tiempo al análisis conjunto del modelo MTSK y sus componentes, y destaca aspectos conceptuales y didácticos. Se sugiere retomar lo trabajado en las sesiones 1 y 2, especialmente lo relacionado con la reconstrucción de objetos 3D a partir de sus representaciones 2D, las dificultades experimentadas por los equipos y por

el alumnado de segundo de Primaria, así como los aprendizajes derivados de esas experiencias para la propia práctica docente.

En particular, se recomienda reflexionar sobre:

- ▶ Análisis conceptual:
 - Relaciones y diferencias, conexiones y analogías entre 2D-3D.
 - Propósitos y formas de definir y clasificar en geometría.
- ▶ Análisis didáctico:
 - Valoración de diferentes recursos, actividades propuestas y planificaciones.
 - Análisis de errores y dificultades del alumnado y su vínculo con los procesos de aprendizaje.

Referencias

- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2021). Caracterizando el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil enseñando prismas. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 237-244). SEIEM. <https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/237.pdf>
- Escudero-Domínguez, A. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Montes, M. A. (2021). Conocimiento didáctico del contenido de un profesor de infantil para la enseñanza de cuerpos geométricos. En J. G. Moriel-Junior (ed.), *Anais do V Congresso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 102-109). Congresseme.
- Herawati, H., Suryadi, D. y Prabawanto, S. (2022). Concept of polygon: Case study of elementary students' difficulties. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(5), 34-47. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1382281.pdf>
- Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 109-149). Sense. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4
- Lo, J. y Cox, D. (2018). Developing and using definitions for prisms and pyramids. En T. E. Hodges, G. J. Roy y A. M. Tyminski (eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 247-254). University of South Carolina; Clemson University.

- Ministerio de Educación de Perú. (2016). *Programa curricular de Educación Secundaria*. <https://www.gob.pe/institucion/minedu/informes-publicaciones/6791708-programa-curricular-de-educacion-secundaria>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.
- Secretaría de Educación Pública (SEP). (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Autor.
- Secretaría de Educación Pública (SEP). (2024a). *Programa de estudio para la Educación Primaria: Programa sintético de la Fase 3*. Autor.
- Secretaría de Educación Pública (SEP). (2024b). *Programa de estudio para la Educación Primaria: Programa sintético de la Fase 4*. Autor.
- Sinclair, N. y Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM*, 47(3), 319-329. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4>

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 10.2. Conocimiento matemático asociado a la tarea «¿Dónde están los polígonos en los poliedros?».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
			1	2	3	4	5
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Definiciones y propiedades de poliedros, en particular de prismas y pirámides.	1.1 1.2	2.3 2.4	3.1 3.2 3.3 3.4	4.1 4.2 4.3	5
		Elementos constitutivos de poliedros: caras, aristas y vértices.		2.1 2.4	3.1 3.2 3.3 3.4	4.1 4.2 4.3	5
	Registros de representación	Conversión entre distintos registros figurales o geométricos de poliedros: proyecciones en perspectiva (opacas y traslúcidas), vistas ortogonales (superior, inferior, frontal, lateral) y representaciones de modelos estructurales o en varillas.		2.1 2.2	3.1 3.2 3.3	4.1 4.2 4.3	5
		Registro discursivo (o de lenguaje natural) y sus diferentes usos: nombrar, describir, definir, explicar.			3.3	4.1 4.2 4.3	5
KPM	La práctica de definir	Condiciones necesarias y suficientes para construir definiciones equivalentes de prismas y pirámides (una primera aproximación).				4.1 4.2 4.3	5

Tabla 10.3 Conocimiento didáctico asociado a la tarea «¿Dónde están los polígonos en los poliedros?».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
			1	2	3	4	5
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KMT	Uso de materiales manipulativos para el aprendizaje de poliedros, como varillas y plastilina, cuerpos troquelados para armar, material estructurado, o prismas y pirámides en materiales traslúcidos (plástico) u opacos (madera).		2.5	3.1 3.2 3.8	4.1 4.2 4.3	5
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Estrategias de enseñanza para promover la observación de un mismo poliedro desde diferentes lugares o vistas.			3.1 3.2	4.1 4.2 4.3

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades					
			1	2	3	4	5	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KMT	Uso de diversas representaciones de un mismo poliedro en diferentes proyecciones, con análisis de sus potencialidades y limitaciones para comunicar información geométrica.			3.2	4.1	5	
						4.2		
						4.3		
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Presentación de variedad de ejemplos (y no ejemplos) de prismas o pirámides en distintos registros (figural y discursivo) para ilustrar sus características distintivas.			3.2	4.1	5
					3.7	4.2		
					4.3			
			Secuencias graduales de actividades para abordar el contenido de prismas o pirámides, con enfoque en la definición o en la clasificación a partir de múltiples criterios.			3.2	4.1	5
						4.2		
						4.3		
	KFLM	Teorías sobre aprendizaje	Imagen conceptual y definición de un concepto geométrico.	1.2		3.1	4.1	5
							4.2	
						4.3		
			Visualización en el aprendizaje geométrico.		2.3	3.1	4.1	5
					2.4		4.2	
							4.3	
KFLM		Dificultades en la interpretación de distintas representaciones de poliedros.		2.2	3.7	4.1	5	
				2.3		4.2		
				2.4		4.3		
			2.5					
		Dificultades para construir poliedros a partir de una representación dada, con diversos materiales manipulativos.		2.2	3.7	4.1	5	
			2.3		4.2			
			2.4		4.3			
	Fortalezas y debilidades	Dificultades para reconocer características necesarias y suficientes que definen un poliedro, o ciertas clases de estos, como prismas o pirámides.			3.7	4.1	5	
					4.2			
					4.3			
KMLS	Secuenciación de temas	Habilidades de visualización, composición y descomposición de formas geométricas.	1.2	2.2		4.1	5	
				2.3		4.2		
				2.4		4.3		
		Identificación, en los documentos curriculares, de los propósitos, el nivel de profundización y los grados escolares en los que se estudian los poliedros, en particular, prismas y pirámides.			3.1	4.1	5	
					3.2	4.2		
					3.3	4.3		
					3.5			
					3.6			

Hojas de trabajo

¿Dónde están los polígonos en los poliedros?

SESIÓN 1. Cuerpos geométricos, análisis de una experiencia en el aula

Organización: En esta sesión trabajaremos individualmente.

Duración aproximada: 2 horas.

Una profesora de segundo de Primaria está trabajando el tema de figuras y cuerpos geométricos con sus alumnos de siete años, en una escuela pública.

ACTIVIDAD 1. En la primera clase, la profesora dialoga con sus alumnos sobre las relaciones y diferencias entre un cubo y un cuadrado.

Analiza el siguiente extracto de la clase.

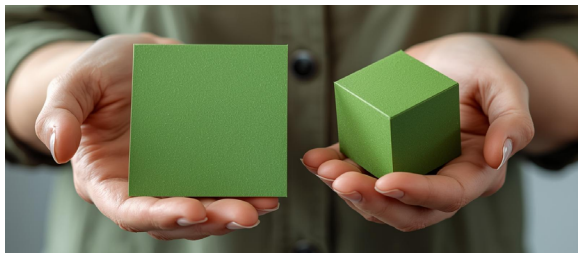
Profesora: ¿Cuál es la diferencia? Sí, son diferentes, pero ¿por qué se llama cuerpo geométrico? (*Muestra el cubo y lo mueve en diferentes posiciones*). Y ¿por qué se llama figura? (*Muestra el cuadrado y coloca ambas figuras juntas a la vista de los niños*).

Alumno 3: El cuadrado está como aplastado y el otro es como cuatro.

Profesora: Exactamente, la figura es plana y el cubo tiene volumen...

Alumno 4: Es como un globo: primero está aplastado y luego le echan aire y se hace más grande.

Profesora: Exactamente (*sonríe*).



Responde a las siguientes preguntas:

1.1. ¿Qué conocimiento evidencia la profesora?

1.2. ¿Qué interpretas sobre cada una de las siguientes afirmaciones realizadas por los alumnos?

a) «El cuadrado está como aplastado y el otro es como cuatro».

B) «Es como un globo, primero está aplastado y luego le echan aire y se hace más grande».

ACTIVIDAD 2. En la segunda clase, la profesora propone la siguiente actividad, tomada de un libro de texto, consistente en construcciones con palillos. Para ello, lleva palillos del mismo tamaño y plastilina.

2 Construcciones con palillos

1. Carlos y Sofía usaron palillos o popotes y bolitas para construir las siguientes figuras. En equipos, elijan una y constrúyanla.

2. Observen su construcción y respondan:

• ¿Cuántas bolitas usaron? _____

A estas uniones se les llama **vértices**.

• ¿Cuántos palillos o popotes usaron? _____

A estas uniones se les llama **aristas**.

3. Comenten en su equipo, ¿qué figuras tienen sus caras?



Construcción 2



<https://historico.conaliteg.gob.mx/?g=2018&a=2>

2.1. Si el alumnado debe pedirle a la profesora la cantidad de palillos y de bolitas de plastilina, completa:

- a) Para realizar la construcción 1, necesitan _____ palillos y _____ bolitas de plastilina.
- b) Para realizar la construcción 2, necesitan _____ palillos y _____ bolitas de plastilina.
- c) Para realizar la construcción 3, necesitan _____ palillos y _____ bolitas de plastilina.

2.2. ¿Cuál de las tres construcciones consideras que implicaría un mayor reto para el alumnado? _____

Explica tu respuesta.

2.3. Observa la producción de una pareja de estudiantes.



¿Cuál de las tres construcciones de la actividad del libro de texto (página anterior) consideras que han reproducido con los palillos y la plastilina? _____

Explica tu respuesta.

2.4. Observa el proceso de la construcción 3 realizada por un equipo de estudiantes.

Describe, para cada intento, lo realizado por el equipo, las ideas geométricas puestas en juego y las posibles dificultades surgidas durante el proceso de construcción.



Intento 1



Intento 2



Intento 3

	Intento 1	Intento 2	Intento 3
Descripción de lo realizado			
Posibles ideas geométricas puestas en juego			
Posibles dificultades encontradas			

2.5. Tras analizar las posibles dificultades encontradas por este equipo, ¿consideras que las características del material (palillos de madera del mismo tamaño y plastilina) limitaron la realización de la construcción? Sí _____ No _____
Explica tu respuesta.

CIERRE DE LA SESIÓN (5 minutos).

1. Seguid las instrucciones de quien dirige la formación y organizad equipos de 2-3 integrantes.
2. Marcad cuál de los siguientes temas ha sido asignado a vuestro equipo.

Temática	Posibles énfasis	
Prismas	Definición	Clasificación
Pirámides	Definición	Clasificación

3. Antes de la siguiente clase, y de acuerdo con la temática asignada, cada miembro del equipo debe:
 - a) Buscar y recopilar documentos que aborden la temática desde una perspectiva matemática, didáctica o curricular.
 - b) Revisar los documentos de consulta recopilados para identificar y registrar los conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares que requiere el profesorado de segundo de Primaria para desarrollar dicha temática.
 - c) Anotar la referencia y la página correspondiente. Este material se utilizará en la siguiente sesión.

4. Para la siguiente clase, cada equipo debe traer un pliego de papel para rotafolio (papel bond, papelógrafo o papel sábana) y tres marcadores (rotuladores o plumones) de punta gruesa de colores distintos (negro, azul y verde).

SESIÓN 2. Cuerpos geométricos, análisis de distintos tipos de conocimientos

Organización: En esta sesión se trabaja en los equipos conformados al finalizar la sesión 1.

Duración aproximada: 2 horas.

ACTIVIDAD 3. Con vuestro equipo de trabajo.

- 3.1. Comentad los hallazgos del trabajo individual previo (puntos 3b y 3c del cierre de la sesión anterior) y sistematizad los conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares encontrados. Si fuera necesario, consultad nuevamente los documentos recopilados. Trazad en el papel para rotafolio (papel bond, papelógrafo o papel sábana) una tabla como la que se muestra a continuación, indicando la referencia y la página correspondiente (20 minutos).

Conocimientos matemáticos	Conocimientos didácticos	Conocimientos curriculares

- 3.2.** Imaginad que vais a desarrollar una clase de una hora sobre la temática asignada (prismas o pirámides) con el énfasis indicado (definición o clasificación). Diseñad o adaptad actividades, problemas o proyectos que podríais desarrollar en ese tiempo. Anotadlos a continuación, indicando la secuencia: con qué iniciáis, qué sigue y cómo finaliza la clase (30 minutos).

Tema:
Propósito de aprendizaje:
Recursos (manipulativos, digitales y no digitales):
Actividades, problemas y descripción del proyecto: 1. 2. 3. 4. ...

Para analizar estas primeras ideas de diseño de clase, responded a las siguientes preguntas (40 minutos).

- 3.3.** ¿Qué contenidos matemáticos pretendéis que aprendan los alumnos de segundo de Primaria en vuestra clase?

Describid detalladamente estos contenidos, con el máximo nivel de concreción matemática.

Justificad cómo se relacionan con las actividades, problemas o proyecto de la sesión planificada.

- 3.4.** ¿Qué conocimientos previos requiere un estudiante de segundo de Primaria para abordar el contenido asignado a vuestro equipo? Esta reflexión debe contemplar tanto elementos curriculares de cursos anteriores (sin limitarse a aspectos triviales como el nombre de las figuras) como a temas más concretos que deberían haberse tratado en clases anteriores.

3.5. ¿Qué otros contenidos matemáticos se relacionan directamente con los tratados en la clase planificada, dentro y fuera del bloque curricular (plan y programas de estudios) correspondiente? Indicad la relación y cómo se va a abordar en el aula.

3.6. ¿Qué aprendizajes matemáticos del currículo de vuestro país se abordarán?

3.7 ¿Qué dificultades y obstáculos de aprendizaje relativos a los contenidos tratados podrían surgir en la clase? Fundamentadlos con referencias científicas.

Dificultades y obstáculos de aprendizaje identificados
Indicad si los tuvisteis en cuenta al planificar la clase. Sí _____ No _____
Si los considerasteis, ¿cómo se evidencian en vuestra planificación?
Si no los considerasteis, ¿cómo los abordaríais en vuestra clase?

3.8. ¿Qué potencialidades y qué limitaciones identificáis en los recursos propuestos para la enseñanza del contenido en la clase planificada?

Potencialidades
Limitaciones
Justificad la utilidad de dicho recursos indicando cómo habéis tenido en cuenta sus características para el diseño de la sesión.

CIERRE DE LA SESIÓN. Si habéis terminado las actividades anteriores, podéis avanzar con las siguientes tareas: de lo contrario, completadlas en casa.

1. Esquematizad en el papel de rotafolio los conocimientos matemáticos (marcador negro), curriculares (marcador azul) y didácticos (marcador verde) identificados respecto a la temática asignada, indicando las relaciones, en caso de haberlas.
2. Leed, de manera individual, el informe de investigación asignado.
3. Para la siguiente sesión, cada equipo debe traer nuevamente los tres marcadores (rotuladores o plumones) de punta gruesa de colores distintos (negro, azul y verde), así como cinta adhesiva y notas adhesivas o tarjetas para añadir información en el rotafolio.

SESIÓN 3. Puesta en común y reflexiones finales

Organización: En esta sesión se realizarán reflexiones en plenaria, por lo es necesario formar nuevos equipos, que llamaremos colectivos, agrupados por temática (prismas o pirámides) y énfasis (definición o clasificación).

Duración aproximada: 2 horas.

ACTIVIDAD 4. Puesta en común, de equipos a colectivos.

- 4.1.** Observad en vuestro colectivo el trabajo de los demás equipos, analizadlo y comentad lo propuesto por cada uno en los ámbitos matemático, didáctico y curricular (10 minutos).
- 4.2.** Seleccionad en vuestro colectivo el esquema mejor estructurado y completadlo si es necesario. Este material será utilizado por la persona que elijáis para realizar la puesta en común (10 minutos).
- 4.3.** Plenaria: 10 minutos por colectivo (40 minutos).

ACTIVIDAD 5. Cierre de la tarea formativa (50 minutos)

Seguid las indicaciones de quien dirige la formación para extraer las conclusiones de las tres sesiones.

- ▶ Análisis conceptual de lo trabajado en las sesiones anteriores:
 - 2D-3D: relaciones y diferencias, conexiones y analogías.
 - Definir y clasificar en geometría: ¿para qué? ¿cómo?
- ▶ Análisis didáctico:
 - Reflexiones sobre los diferentes recursos, actividades propuestas y diseños de las planificaciones.
 - Errores y dificultades del alumnado: ¿qué nos indican sobre el proceso de aprendizaje?

11. Atribuyendo significado a la rotación

Caroline Almeida Souza Silva

<https://orcid.org/0000-0002-7089-7090>

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) (Brasil)

Miguel Ribeiro

<https://orcid.org/0000-0003-3505-4431>

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) (Brasil)

Formación continua

Nivel al que se dirige la tarea: Profesorado en formación de Educación Secundaria

Duración aproximada de la aplicación: 4 horas

Fundamentación

Entre los diversos tópicos de geometría, las transformaciones geométricas isométricas juegan un papel central, ya que permiten al alumnado explorar y comprender conceptos matemáticos abstractos mediante el desarrollo del pensamiento geométrico, además de estimular la imaginación y la creatividad para que pueda interpretar el mundo en que vive. Para ello, es necesario considerar qué y cómo aprende el alumnado (Ribeiro *et al.* 2021), que toma como punto de partida la realidad a través de la contextualización, para, posteriormente, llegar a una comprensión de conceptos abstractos (Giménez y Vanegas, 2019).

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM, 2000, p. 41) afirma que «los programas de enseñanza desde preescolar hasta el grado 12 deben permitir a todo el alumnado aplicar transformaciones y utilizar la simetría para analizar situaciones matemáticas», ya que son oportunidades para que puedan comprender otros tópicos y conceptos matemáticos importantes, por ejemplo, funciones, simetría, congruencia,

ángulos, vectores y posiciones relativas entre líneas. Además, la enseñanza de estos tópicos proporciona un contexto en el que el alumnado puede ver las matemáticas como una disciplina interconectada, y ofrece oportunidades para participar en actividades de razonamiento de orden superior utilizando representaciones múltiples (Hollebrands, 2003).

La rotación es una de las tres transformaciones geométricas isométricas, y se considera la más difícil de comprender tanto para el alumnado (p. ej., Küchemann, 1980) como para el profesorado en formación (p. ej., Gomes, 2012). Algunas dificultades relacionadas con la rotación consisten en comprender que, para realizar esta transformación, se debe seguir un conjunto de procedimientos (algoritmo), así como entender que la figura original y su imagen son congruentes, es decir, que la rotación es una isometría (Lima, 1992); identificar el centro de rotación, especialmente cuando no pertenece a la figura (Gaspar y Cabrita, 2014; Küchemann, 1980), y distinguir la rotación de la traslación (Abar y Alencar, 2013) o la reflexión (Gomes, 2012). Se observa que estas dificultades están asociadas a una comprensión insuficiente de las diferencias entre cada una de las transformaciones geométricas y, por lo tanto, la rotación es un tópico importante para desarrollar discusiones con enfoque en el conocimiento especializado del profesorado en formación, a partir de la tarea formativa propuesta.

En esta tarea asumimos que entender la rotación implica comprenderla como una operación geométrica realizada sobre una figura inicial, a partir de un centro de rotación (punto o recta) y una medida de la amplitud del ángulo de rotación (con su sentido de rotación), que permite obtener una imagen transformada congruente a la inicial. Para ello, es fundamental comprender la diferencia entre transformaciones geométricas isométricas y simetría, según sus propiedades y procedimientos específicos (algoritmos asociados). Otras nociones esenciales se refieren a los elementos constitutivos para realizar e identificar la rotación y cómo se pueden construir figuras a partir de esta transformación.

Objetivos generales de la tarea

Con esta tarea se busca que el profesorado en formación:

1. Desarrolle su conocimiento especializado sobre las propiedades, fundamentos y definición de rotación, así como sobre las características asociadas a la definición y procedimientos utilizados para identificar una rotación.
2. Amplíe su conocimiento interpretativo ampliando su espacio de solución, al tener que interpretar producciones del alumnado e identi-

ficar las principales dificultades y errores que suelen cometer en el ámbito de la rotación.

3. Adquiera conocimiento especializado con respecto a proporcionar retroalimentación constructiva sobre las formas de pensar matemáticamente asociadas a las producciones del alumnado.
4. Profundice en su conocimiento especializado para establecer conexiones entre la rotación y otras transformaciones geométricas isométricas y la simetría.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar la tarea, el profesorado en formación debería tener conocimientos sobre:

- ▶ Los procedimientos para identificar una reflexión y una traslación (que sustentan la diferenciación de la rotación).
- ▶ Amplitud y dirección de un ángulo.
- ▶ Propiedades transversales a todas las transformaciones geométricas isométricas, como la congruencia entre figura e imagen y la conservación de distancias (isometría).

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Es importante considerar qué conocimiento pedagógico se deberá vivenciar y no «enseñar», de modo que el profesorado en formación pueda modelizar posteriormente los tipos de experiencias que ha vivenciado. El foco de la tarea es la discusión y el desarrollo del conocimiento matemático especializado. Durante la implementación y las discusiones, el profesorado en formación debe ser confrontado con la necesidad de proporcionar retroalimentación al alumnado, incluso a partir de las producciones de los propios compañeros de la formación.

La tarea que aquí se presenta forma parte de un itinerario de tareas para la formación que comienza con la traslación y la reflexión; tras la rotación se aborda una discusión en torno a la simetría y la composición de transformaciones geométricas isométricas. A cada uno de estos tópicos se asocia una tarea formativa. Este itinerario difiere del enfoque habitual, ya que lo más común es comenzar por la simetría. Sin embargo, el objetivo es enfatizar la comprensión de los algoritmos involucrados en las transformaciones geométricas y las generalizaciones asociadas. Posterior-

mente, se aborda la discusión de que la simetría no es una transformación geométrica, sino una propiedad de las figuras, lo cual se vuelve evidente al no mezclar los procedimientos con el resultado final.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Al menos dos hojas A4 para cada grupo de decentes (grupos de 4).
- ▶ Clips y grapadora.
- ▶ Transportador.
- ▶ Ordenador y proyector de datos.
- ▶ Pizarra y tiza/rotulador.

Actividades que conforman la tarea

A continuación se presentan algunas posibles discusiones centradas en el desarrollo del conocimiento interpretativo y especializado del profesorado en formación en el ámbito de la rotación. Estas se desarrollan a lo largo de la tarea formativa y ofrecen orientaciones didácticas que pueden servir a quien dirige la formación para gestionar su implementación. El objetivo es facilitar la construcción de una imagen mental sobre cómo llevar a cabo la formación especializada, de modo que se aproxime lo máximo posible a los objetivos definidos por quienes han conceptualizado esta tarea formativa, tanto en términos metodológicos como en lo relativo a las discusiones matemáticas fundamentales.

En general, se propone a quien dirige la formación trabajar las actividades 1 y 2 (parte preliminar) de forma individual, y las actividades 3 (parte I) y 4 (parte II) en pequeños grupos, idealmente de cuatro docentes.

Quien dirige la formación comienza presentando los objetivos generales de la sesión —es decir, cuál será el foco prioritario de discusión— y explica que la tarea consta de tres partes: parte preliminar (actividades 1 y 2), parte I (actividad 3) y parte II (actividad 4). En este momento no conviene profundizar en los conceptos involucrados.

Para la implementación, el profesorado en formación debe recibir cada parte de la tarea por separado y todos los registros deben realizarse con bolígrafo. Primero se entrega la parte preliminar (actividades 1 y 2) para que responda individualmente (unos 15 minutos) y se recogen las producciones. A continuación, se organiza al profesorado en formación en grupos de cuatro participantes y se entrega la parte I (actividad 3), para que resuelvan la tarea para el alumnado y respondan a las preguntas específicas para el profesorado en formación. Se debe indicar que registren solo el consenso

de las respuestas del grupo (máximo de 30 minutos). Posteriormente, se recogen las producciones y se entrega la parte II (actividad 4), para que puedan discutir, interpretar y atribuir significado a algunas producciones del alumnado respecto a la resolución de la tarea de la parte I (30 minutos).

Cabe señalar que todas las producciones del profesorado en formación deben ser recogidas por quien dirige la formación para seleccionar aquellas que matemáticamente puedan generar discusiones más fructíferas sobre la forma de pensar, los registros de representación o los procedimientos, entre otros aspectos. Una posible estrategia es fotografiar las producciones del profesorado en formación e incluirlas en las diapositivas, para que, durante la sistematización en la fase final, pueda valorar si cambiaría o no sus respuestas iniciales. Además, es fundamental que quien dirige la formación observe las discusiones en los grupos (sin intervenir) para decidir qué grupo presenta resoluciones interesantes desde el punto de vista matemático, según cada parte y cada pregunta de la tarea. Esta observación y el proceso de selección deben explicitarse posteriormente en la discusión con el profesorado en formación, cuestionando incluso por qué se ha elegido determinada producción como primera y no otra. De este modo, el profesorado en formación también podrá experimentar la dimensión pedagógica que implica seleccionar y ordenar las producciones para la discusión.

Tras completar toda la tarea formativa, se sugiere un breve receso para que quien dirige la formación puede leer las respuestas del profesorado en formación y decidir dónde iniciar la discusión. Posteriormente, se realiza la puesta en común de las respuestas individuales y grupales, siguiendo la misma secuencia en que fueron propuestas y resueltas.

Para una mejor gestión del tiempo de ejecución de las tareas, se establece el siguiente cronograma (ideal):

Tabla 11.1. Cronograma de tareas

Etapa	Tiempo (4 h)	Organización
Presentación de los objetivos de la formación	5 minutos	
Resolución parte preliminar (actividades 1-2)	15 minutos	Individual
Resolución parte I (actividad 3)	30 minutos	Grupos de 4 participantes
Resolución parte II (actividad 4)	30 minutos	
Intervalo	10 minutos	
Discusión de la parte preliminar	30 minutos	
Discusión de la situación para el alumno	30 minutos	Plenaria
Discusión de las preguntas para el profesor	30 minutos	
Discusión de la parte II	40 minutos	
Sistematización	20 minutos	

Actividades 1 y 2. Parte preliminar

Descripción

Esta parte de la tarea debe realizarse de forma individual. Después de resolver toda la tarea, la discusión comienza con la primera actividad: «1. Imagina que estás en la calle y alguien te pregunta: "en un contexto matemático, ¿qué es la rotación?". ¿Qué responderías? (Recuerda que es una conversación informal, no una explicación didáctica)».

De las respuestas presentadas por el profesorado en formación, quien dirige la formación debe centrarse en aquellas que no definen la rotación de forma completa. Habitualmente, las respuestas se asocian únicamente con la rotación en el plano, sin considerar la rotación en el espacio, y no presentan la rotación como una transformación geométrica isométrica en la que la figura y su imagen son congruentes. Además, es frecuente que el profesorado en formación presente respuestas que no son válidas en el contexto de la rotación como tópico matemático, por ejemplo, el sentido astronómico del término. En resumen, debe discutirse si las respuestas presentadas son completas y matemáticamente adecuadas, es decir, si especifican todos los elementos constitutivos de la rotación (centro o eje de rotación y ángulo de rotación, incluyendo la amplitud y la dirección) o si únicamente describen los procedimientos para realizarla, sin abordar su fenomenología.

En este punto de la formación, el objetivo es discutir las respuestas presentadas por el profesorado en formación, aunque su validación debe ocurrir al final, durante la sistematización. Se trata de cuestionar el profesorado en formación y problematizar si los términos utilizados son matemáticamente adecuados en cuanto al lenguaje (y, por lo tanto, pueden resaltarse respuestas similares y diferentes). Algunas preguntas orientadoras son:

- ▶ ¿Las respuestas explican qué es la rotación o son ejemplos de rotación? ¿Utilizan términos matemáticamente correctos?
- ▶ ¿Qué elementos son imprescindibles en la rotación?
- ▶ ¿Cuál es la diferencia entre la rotación y otras transformaciones geométricas isométricas?
- ▶ En la rotación ¿qué transformación se aplica a una figura para obtener su imagen?

Una respuesta adecuada a la actividad 1 implicaría conocimiento sobre la fenomenología del tópico: la rotación es una de las tres transformaciones geométricas isométricas. Consiste en un movimiento rígido que se aplica a una figura respecto a un punto (centro de rotación) o un eje, de acuerdo con la amplitud y dirección de un ángulo (ángulo de rotación), cuyo vértice es el punto fijo (o un punto del eje), y mediante el cual se obtienen los puntos correspondientes de la imagen. Además, comprender qué es la rotación implica especificarla como isométrica, ya que todos

los puntos originales y sus correspondientes imágenes están a la misma distancia del centro de rotación, alrededor del cual se realiza la transformación.

Después se plantea la actividad 2: «El profesor Mario tiene la intención de discutir la definición matemática de rotación con sus alumnos de séptimo grado (12-13 años). Ha encontrado algunas definiciones y las presenta en una formación del CIEspMat, pues necesita ayuda para saber cuáles son más apropiada para discutir con su alumnado. Ayuda al profesor Mario a elegir las definiciones más adecuadas de entre las que se presentan a continuación y justifica por qué son o no definiciones válidas. Si requieren cambios, indica cuáles serían necesarios para que constituyan definiciones correctas de rotación.

Tabla 11.2. Definiciones de rotación encontradas por el profesor Mario.

1. La rotación es la composición de dos reflexiones de ejes concurrentes.

2. En una rotación, cada figura gira con respecto a un punto llamado **centro de rotación**. La figura original y la rotada tienen las mismas medidas, y sus elementos están a la misma distancia del centro de rotación.

3. La simetría rotacional se produce cuando una figura plana **gira alrededor de un punto**, según un ángulo (con una medida de apertura entre 0° y 360°), en una determinada **dirección** (en sentido horario o antihorario). Así se obtiene siempre una figura plana que mantiene la misma forma y tamaño que la figura original.

4. Sea O un punto tomado en el plano Π y sea $\alpha = \widehat{AOB}$ un ángulo de vértice O . La rotación del ángulo α alrededor del punto O es la función $\rho_{O,\alpha}: \Pi \rightarrow \Pi$ definida de la siguiente manera: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ y, para cada punto, $X \neq O$ en Π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ es el punto del plano Π tal que

$$d(X,O) = d(X',O), \widehat{OXO'} = \alpha$$

y el «sentido de rotación» de A a B es el mismo que el de X a X' .

Quien dirige la formación debe tener en cuenta que las definiciones presentadas incluyen pseudodefinitiones procedentes de libros de texto (en este caso, de Brasil: definiciones 2 y 3 de la tabla 11.2), y cabe esperar que el profesorado en formación elija precisamente estas como respuesta. Además, conviene introducir la idea de que no existe una única forma de definir un tópico, pero es crucial que la definición sea matemáticamente correcta y, en este caso, también comprensible para el alumnado de séptimo grado. Algunas preguntas orientadoras son:

- ▶ ¿Qué caracteriza una definición matemática?
- ▶ ¿Qué debe contener una definición matemática?
- ▶ ¿Cómo diferenciar una definición de una pseudodefinition?
- ▶ ¿Dónde encontramos definiciones «verdaderas»: en los libros didácticos, en los libros de matemáticas?

Estas preguntas deben conducir a la discusión de que, en general, los libros de texto actuales no presentan definiciones matemáticas; habitualmente presentan

pseudodefiniciones, mezclan procedimientos con la definición o incluso ofrecen definiciones incompletas o meros ejemplos del concepto. Asumimos que una definición matemática es un conjunto mínimo de propiedades que permite identificar de manera única la entidad matemática. Por lo tanto, las definiciones 2 y 3 (tabla 11.2) no cumplen este criterio.

Quien dirige la formación debe analizar junto al profesorado en formación cada una de las definiciones y pseudodefiniciones, preguntando por qué cada una de las presentadas es o no una definición de rotación. Además, debe examinarse qué elementos faltan en aquellas que no constituyen una definición formal:

La definición 1 no es válida, ya que describe un procedimiento para obtener la rotación mediante la composición de otra transformación geométrica isométrica, pero no cumple el criterio de propiedades mínimas del tópico.

En la definición 2 se utiliza el propio tópico para definirlo, se explica también cómo se realiza la rotación y solo se presenta uno de sus elementos constitutivos (el centro de rotación). Aunque destaca que es una isometría, no presenta las propiedades mínimas del concepto.

En la definición 3 se confunde erróneamente la rotación con la simetría rotacional, lo que genera un malentendido entre la operación y su resultado. Además, se limita la rotación de las figuras a una única rotación, o sea, a una amplitud de ángulo de rotación que no exceda los 360° , aunque se indica que es una isometría, tampoco se presentan las propiedades mínimas necesarias que permitan identificar la rotación de manera unívoca.

En la definición 4 constituye una posible definición matemática, pero no utiliza un lenguaje comprensible para el alumnado de séptimo grado, ya que, por ejemplo, aún no sabe formalmente qué es una función.

Para que el alumnado la comprenda, esta definición 4 puede reformularse de la siguiente manera: «Sea O un punto del plano llamado centro de rotación y sea $\widehat{A\hat{O}B}$ un ángulo. La rotación de amplitud $\widehat{A\hat{O}B}$ alrededor del punto O es una operación que transforma el punto X en el punto X' , según la amplitud de $\widehat{A\hat{O}B}$ y una dirección determinada, de modo que la distancia entre O y X es la misma que entre O y X' ».

Cabe señalar que esta es la definición de rotación en el plano (2D), pero también es posible realizar una rotación en el espacio (3D) respecto a un punto y una línea recta (eje). A lo largo de la formación y durante la sistematización, esta definición debe elaborarse junto con el profesorado en formación, que discutirá si mantendría o cambiaría las respuestas dadas y por qué.

Objetivos específicos

El punto de partida siempre es acceder al conocimiento previo del profesorado en formación para poder desarrollarlo posteriormente. Por ello, el profesorado en formación resuelve primero la tarea completa y solo después se discute.

- ▶ Saber qué entiende el profesorado en formación sobre la fenomenología de la rotación (actividad 1) para que revele su conocimiento matemático, sin centrarse en enseñar cómo se realiza la rotación ni en dar ejemplos.
- ▶ Acceder al conocimiento del profesorado en formación sobre la definición matemática de rotación (actividad 2).
- ▶ Desarrollar la comprensión de qué es la rotación a partir del consenso alcanzado en las discusiones de sistematización.
- ▶ Conocer qué caracteriza una definición matemática, así como las adaptaciones necesarias para que sea matemáticamente válida y comprensible para el alumnado, según los diferentes niveles educativos, sin perder el rigor matemático.

Orientaciones didácticas

Se propone una duración de 20 minutos para la resolución individual y 30 minutos para la discusión grupal de las respuestas presentadas por el profesorado en formación (4 personas por grupo). Se sugiere distribuir las actividades 1 y 2 en hojas separadas, porque, cuando se pregunta al profesorado en formación «cuál es el tópico», habitualmente considera que la pregunta está relacionada con la definición y puede «copiar» una de las definiciones presentadas en la actividad 2. Debe tenerse en cuenta que, al preguntar «cuál es el tópico», el objetivo es discutir la fenomenología de la rotación, no su definición.

Actividad 3. Parte I

Descripción

Quien dirige la formación debe iniciar la discusión con las respuestas del profesorado en formación a la tarea para el alumnado (situada en el recuadro), ya que la primera pregunta de la tarea profesional es «Resuelve la tarea por ti mismo (sin pensar en un contexto de enseñanza)», que debe resolverse en grupo.

Se pregunta al profesorado en formación cómo resolvió la tarea del alumnado y se comparan las respuestas entre grupos. La elección de qué grupo comparte primero su respuesta no debe ser aleatoria. Se sugiere empezar con alguna idea errónea sobre el tópico o alguna respuesta incorrecta, y continuar con los grupos que presentaron respuestas variadas. Lo habitual es que haya respuestas matemáticamente inadecuadas, ya que la tarea se ha diseñado teniendo en cuenta las principales dificultades, que suelen ser las mismas para el alumnado y para el profesorado en formación.

Respecto a la tarea para el alumnado, la pregunta «a) Anota lo que te llamó la atención al mirar la carta de cada situación» pretende movilizar el conocimiento del

profesorado en formación sobre la rotación. Se espera que no confunda las transformaciones geométricas isométricas, que sea capaz de visualizar e identificar que el movimiento realizado es una rotación en ambas situaciones y que se centre en lo común y lo distinto entre ellas (aspectos matemáticos y no matemáticos). Hay que tener en cuenta que en esta tarea no es necesario realizar los procedimientos para rotar una figura (aunque debe conocerlos), sino reconocer que la imagen se obtuvo mediante rotación.

Quien dirige la formación siempre debe tomar las respuestas de cada grupo como punto de partida. Sin embargo, algunas cuestiones pueden resultar problemáticas, como discutir qué matemáticas observa el profesorado en formación en ambas situaciones. Además, cuando se centre en la situación 1, conviene plantear preguntas como:

- ▶ ¿Es posible dividir la carta por la mitad para que ambas partes sean idénticas?
- ▶ Y en la situación 2, ¿qué representa la «carta» de abajo y por qué es transparente en relación con la «carta» de arriba? ¿Tenemos en esta situación una o dos cartas?

Respecto a las preguntas «b) En la situación 1, identifica el movimiento realizado para construir la carta completa a partir de una de sus partes. Justifícalo» y «c) En la situación 2: i) ¿Puedes identificar el movimiento realizado para obtener la carta en la nueva posición? En caso afirmativo, descríbelo. Si no, justifícalo», la discusión debe centrarse en el conocimiento del profesorado en formación en relación con los procedimientos empleados para obtener la imagen mediante rotación, y en diferenciar dichos procedimientos de otras transformaciones geométricas isométricas.

En la pregunta b), para desarrollar el conocimiento sobre los procedimientos empleados en la rotación, conviene preguntar cómo identificaron que las figuras son resultado de rotaciones. Cabe señalar que, si alguno de los grupos no identifica en la situación 1 que el movimiento es una rotación, sino que considera posible obtener la carta mediante dos reflexiones (pues una rotación puede entenderse como el resultado de dos reflexiones con ejes no paralelos) y una traslación para «completar» la otra mitad de la carta, quien dirige la formación debe preguntar si existe otra estrategia para obtener la carta completa a partir de una de sus mitades que minimice los movimientos. Esta discusión debe hacerse explícita en caso de que ningún grupo la aborde para poder establecer posteriormente una conexión con la composición de transformaciones geométricas, que forma parte del itinerario de tareas formativas propuestas.

Conviene preguntar sobre la amplitud y el sentido del ángulo de rotación en la situación 1, cuya amplitud es de 180° y cuyo sentido es indiferente, ya que puede ser horario (negativo) o antihorario (positivo). Además, quien dirige la formación puede mostrar que, al realizar una rotación de 180° sobre una figura, el resultado coincide con el de una reflexión central (respecto de un punto). Sin embargo, los procedimientos utilizados en cada transformación son diferentes: aunque se obtiene

el mismo resultado final, los algoritmos son distintos —de modo análogo a lo que ocurre con $6 - 2 = 4$ y $8 : 2 = 4$, que dan el mismo resultado, pero implican procedimientos distintos—.

Respecto a las preguntas c)-i), a partir de las respuestas del profesorado en formación, quien dirige la formación debe analizar si emplean términos matemáticamente apropiados, ya que es posible que usen «desplazamiento» para referirse a la rotación. Este término también puede emplearse para referirse a la traslación (la figura se desplaza respecto de un vector), por lo que es necesario precisar que, en la rotación, la figura se desplaza respecto de un centro y un ángulo orientado. Por lo tanto, deben considerarse la amplitud y la dirección del ángulo de rotación.

Otra cuestión que debe abordarse es la estimación de la amplitud del ángulo, que resulta importante porque implica visualización. Mediante esta tarea para el alumnado es posible repasar cómo se mide la amplitud de un ángulo con el transportador, y también discutir dónde podría ubicarse la imagen si solo se considera la amplitud del ángulo, ya que en la rotación es necesario especificar la dirección.

La discusión de la pregunta c)-ii) se centra en los procedimientos para realizar una rotación sin tener que ejecutarla realmente, pues ya se tiene el resultado en la tarea. La idea central es generalizar los procedimientos para cualquier rotación. Además, quien dirige la formación debe discutir la medición de la amplitud del ángulo en la situación 2 y cuestionar si basta con expresar un valor aproximado, lo que brinda la oportunidad de discutir la necesidad de usar el transportador para ser preciso en los procedimientos empleados. De hecho, para trabajar la noción intuitiva de rotación, el valor aproximado es una estrategia inicial; sin embargo, cuando se realiza la rotación, la precisión de la amplitud del ángulo es un factor que considerar, ya que, con solo variar el ángulo, se obtiene una imagen situada en una ubicación diferente.

Así, la discusión debe centrarse en desarrollar el conocimiento del profesorado en formación respecto de los procedimientos utilizados para realizar la rotación de una figura, incluso cuando el resultado ya esté definido. Esto permite comprender que dichos procedimientos pueden conceptualizarse como secuencias algorítmicas:

Paso 1: elegir un punto P que pertenezca a la figura para comenzar y trazar un segmento que parta del centro de rotación O y pase por el punto P .

Paso 2: colocar el centro del transportador en O , de modo que la línea base del transportador coincida con el segmento OP .

Paso 3: medir el ángulo α dado, que indica la amplitud de la rotación, considerando el sentido (horario o antihorario), y marcar un punto X que indique la gradación del ángulo α , según el valor expresado en el extremo del transportador.

Paso 4: unir el centro O con el punto X dibujando un segmento que parta de O .

Paso 5: trasladar la medida de longitud de $[OP]$ a $[OX]$, con una regla o compás, y marcar un punto P' en $[OX]$, de modo que $[OP] = [OP']$.

Paso 6: repetir los pasos del 1 al 5 para obtener algunos puntos de la figura (por ejemplo, en el caso de un polígono, los vértices).

Paso 7: unir los puntos transformados para completar la figura, según el orden en que se rotaron, y obtener así una imagen congruente con la figura inicial.

Antes de presentar estos pasos, quien dirige la formación debe preguntar al profesorado en formación sobre los procedimientos para realizar la rotación y registrarlos en la pizarra, para luego comparar las respuestas proporcionadas con los pasos presentados.

Para concluir la discusión de las preguntas b) y c)-i) y ii), conviene formular otras preguntas, como: «¿En qué se diferencia la rotación de la figura en la situación 1 de la rotación en la situación 2?». El objetivo es que el profesorado en formación advierta que lo que varía no es la transformación, sino el centro de rotación, la amplitud del ángulo y el sentido; es decir, cambian sus fundamentos.

Respecto a la pregunta d), la discusión debe centrarse en la importancia de identificar el centro de rotación como el único punto fijo en esta transformación (a excepción de la rotación de identidad). Algunas preguntas que debe formular quien dirige la formación sobre este tópico son:

- ▶ ¿Cuál es el rol del centro de rotación en esta transformación?
- ▶ ¿Es posible realizar la rotación sin conocer o identificar el centro de rotación?
- ▶ ¿El centro de rotación es siempre un único punto?
- ▶ ¿Está siempre fijo el centro de rotación?
- ▶ ¿El centro de rotación siempre pertenece a la figura?
- ▶ ¿Solo es posible rotar desde un punto?
- ▶ ¿Existe algún otro elemento imprescindible para realizar la rotación?

Las dos primeras preguntas tienen como objetivo discutir la necesidad de disponer de un punto (o eje) de rotación para ejecutar la transformación. En cuanto a la tercera, se espera que el profesorado en formación comprenda que en toda rotación existe un único punto, que corresponde al vértice del ángulo de rotación. Por lo tanto, este punto permanece invariante durante la transformación (aspecto que se aborda en la cuarta pregunta). En la quinta pregunta se da la circunstancia de que el centro de rotación pertenece a la figura en ambas situaciones; sin embargo, es importante señalar que esto no siempre sucede. Se ha optado por que el centro pertenezca a la figura porque el alumnado suele tener mayor dificultad para identificarlo cuando no pertenece a la figura (Gomes, 2012; Küchemann, 1980). La sexta pregunta pretende plantear que la rotación se puede realizar en el espacio si se considera que el centro de rotación es un punto o una línea recta (eje de rotación).

Con estas preguntas se busca que el profesorado en formación concluya que, para realizar la rotación en el plano, son necesarios el centro de rotación (pregunta séptima), la figura y el ángulo (dirección y amplitud) de rotación.

Tras discutir toda la tarea para el alumnado y las respuestas que el profesorado en formación proporciona, quien dirige la formación debe abordar las demás cuestiones, relativas a la práctica profesional específica de la enseñanza de las matemáticas.

El propósito de la pregunta 3.1 es que el profesorado en formación anticipe las dificultades del alumnado para, posteriormente, identificar y comprender mejor los errores presentes en las producciones de la parte II. Ante las dificultades enumeradas por el profesorado en formación, quien dirige la formación debe plantear las siguientes cuestiones:

- ▶ ¿Qué podemos hacer para ayudar al alumnado a superar estas dificultades sin darle la respuesta?
- ▶ ¿Qué preguntas pueden plantearse para ayudarlo a diferenciar la rotación de otras transformaciones geométricas isométricas?
- ▶ ¿Existe algún recurso que pueda emplearse para que el alumnado visualice que en la tarea (situación 1) no es posible obtener la otra mitad de la figura con una sola reflexión axial? (Esta es una dificultad frecuente: no diferenciar las transformaciones geométricas isométricas entre sí).

Quien dirige la formación debe señalar que el «mira»³ (también conocido como espejo mágico, véase la figura 11.1) es un recurso que puede emplearse para ayudar al alumnado a visualizar el reflejo de la figura (Ribeiro *et al.*, 2021) y advertir que lo que aparece en la situación 1 no se obtuvo por reflexión axial. Llegados a este punto, conviene mostrárselo al profesorado en formación, ya que posiblemente muchos lo desconozcan, así como sus potencialidades y limitaciones.

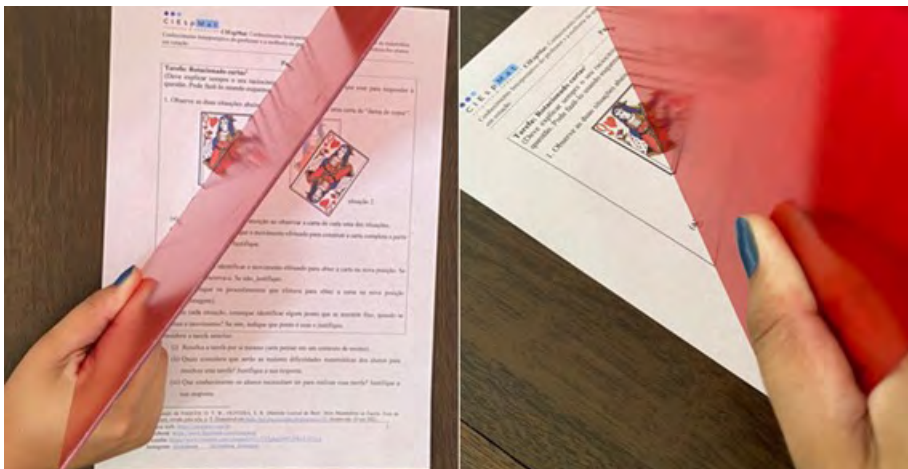


Figura 11.1. Ejemplos del uso del «mira».

3. El «mira» es un recurso compuesto por una placa de acrílico o vidrio que permite realizar o visualizar copias reflejadas de dibujos o imágenes.

Además, quien dirige la formación debe discutir con el profesorado en formación la importancia de generalizar algunas ideas asociadas a la rotación, como, por ejemplo, la congruencia entre figura e imagen y los fundamentos para superar algunas de las posibles dificultades del alumnado al responder a esta tarea. Para ello, algunas preguntas orientadoras son:

- ▶ ¿Qué preguntas habría que hacer al alumnado para que comprenda la congruencia entre figura e imagen en ambas situaciones? (Por ejemplo: ¿qué se mantiene y qué cambia entre una mitad de la carta y la otra en la situación 1? ¿Qué se mantiene y qué cambia en la situación 2?).
- ▶ ¿Qué elementos constituyen la rotación en ambas situaciones, es decir, qué se necesita siempre para realizarla?

El foco de esta discusión es destacar que, en ambas situaciones, se realizó una rotación a partir de un centro de rotación: en la situación 1 se sitúa en el centro de la carta, y en la situación 2, en la esquina inferior izquierda (vértice del rectángulo). Identificar el centro de rotación suele ser una de las principales dificultades del alumnado al trabajar con rotaciones, junto con determinar la amplitud y el sentido del ángulo de rotación. Ante esto, algunas preguntas orientadoras son:

- ▶ ¿Cómo podemos revisar (o introducir) el concepto de ángulo con el alumnado?
- ▶ ¿Es importante el uso del transportador en esta tarea?
- ▶ ¿El ángulo es siempre fijo en la rotación?
- ▶ ¿Qué significa el *sentido* de un ángulo en el contexto de una rotación?

Las discusiones sobre esta tarea ofrecen la oportunidad de revisar (o introducir) el concepto de ángulo y de cómo determinar su amplitud con el transportador, así como su dirección, a partir de las dos situaciones presentes. Según el nivel de comprensión del alumnado, puede considerarse la opción pedagógica de discutir, o no, la precisión o el valor estimado de la amplitud del ángulo de rotación. Si se desea abordar el tema con precisión, será necesario el transportador, por lo que habrá que analizar su uso.

Quien dirige la formación también debe preguntar al profesorado en formación si considera que el alumnado tendrá dificultades para identificar los elementos constitutivos de cualquier rotación (si el profesorado en formación no lo ha mencionado como dificultad). Algunas preguntas orientadoras son:

- ▶ ¿Le resultará fácil al alumnado identificar los elementos constitutivos de cualquier rotación?
- ▶ En esta tarea, ¿tendrá dificultades el alumnado para localizar el centro de rotación?
- ▶ ¿En cuál de las situaciones es más difícil localizar el centro de rotación y por qué?

Cabe destacar que las investigaciones muestran que el alumnado tiene más dificultad para realizar la rotación cuando el centro no pertenece a la figura. Como esta tarea es una introducción al tópico, se ha decidido no considerar este aspecto.

Respecto a la pregunta 3.2 para el profesorado en formación, el objetivo es discutir qué necesita conocer el alumnado (qué y cómo debe conocerlo) para realizar la tarea, con el fin de establecer conexiones con otros tópicos. La discusión siempre debe partir de las respuestas presentadas por el profesorado en formación, pero quien dirige la formación debe plantear las siguientes cuestiones:

- ▶ ¿Qué debería hacer el profesorado en formación si el alumnado no conoce el concepto de ángulo?
- ▶ Si el alumnado no sabe usar el transportador, ¿qué implicaciones tendrá para el logro del objetivo de aprendizaje matemático de la tarea?

Según el actual documento curricular brasileño, la Base Nacional Común Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), se espera que la introducción de los ángulos se produzca a partir de cuarto de Primaria (alumnado de 9-10 años). Se debe abordar la noción intuitiva «qué es un ángulo» utilizando ejemplos de situaciones cotidianas, como «ángulo de apertura de una puerta» o qué significa «golpear la pelota en ángulo». Estos ejemplos pueden representarse de forma pictórica, por ejemplo, mostrando los postes de una portería como semirrectas que forman ángulos (de hecho, en una portería pueden identificarse cuatro ángulos rectos).

Ahora bien, aunque el alumnado no sepa utilizar el transportador, intuitivamente ya conoce el concepto de ángulo, asociado a la noción de abrir semirrectas o girar una figura. El profesorado en formación debe retomar o introducir la definición de ángulo y cómo se mide su amplitud; por tanto, debe conocer al menos una definición: «Se llama ángulo al encuentro de dos rayos del mismo origen, no contenidos en la misma recta (no colineales)» (Dolce y Pompeo, 1993). El origen de estos rayos se llama vértice del ángulo y cada uno de ellos es uno de los lados del ángulo.

Más que conocer la definición de ángulo, el alumnado necesita saber determinar su amplitud; de manera intuitiva, puede incluso darse cuenta de que una amplitud de 180° equivale a media vuelta.

Objetivos específicos

- ▶ Conocer lo que sabe el profesorado en formación sobre la rotación desde la perspectiva del alumnado de 12-13 años, antes de las discusiones formativas, y desarrollar ese conocimiento.
- ▶ Movilizar el conocimiento del profesorado en formación sobre la rotación para que pueda profundizar en el concepto y diferenciarlo de la reflexión.
- ▶ Explorar y ampliar el conocimiento del profesorado en formación sobre los procedimientos para obtener la imagen de una figura mediante rotación.

- ▶ Indagar en el conocimiento del profesorado en formación sobre los elementos constitutivos de la rotación (figura, punto o eje de rotación, amplitud y dirección del ángulo de rotación, e imagen), y profundizar en él.

Orientaciones didácticas

Es probable que el profesorado en formación encuentre algunas dificultades al resolver la tarea destinada al alumnado, ya que esta se ha diseñado a partir de las principales dificultades que enfrenta el alumnado, las cuales, en muchos casos, coinciden con las del profesorado en formación. Esta tarea debe implementarse después de que el alumnado haya desarrollado sus conocimientos sobre traslación y reflexión, de acuerdo con el itinerario previsto para el estudio de las transformaciones geométricas y la simetría.

Se propone una duración de 30 minutos para la resolución en grupos y 60 minutos para la discusión en gran grupo.

Actividad 4. Parte II

Descripción y rol de quien dirige la formación

Al pedir que el profesorado en formación responda a la primera pregunta (a) de esta parte II, quien dirige la formación pretende que indique las producciones correctas e incorrectas y las razones matemáticas que respaldan los errores, para centrar así la atención en desarrollar el conocimiento interpretativo.

La respuesta de Simone a la pregunta (c) de la tarea para el alumnado se ha incluido por ser matemáticamente incompleta, dado que expresa la rotación solo como un desplazamiento (en (i)) y considera erróneamente el movimiento como dos traslaciones (pregunta (ii)). En su producción relacionada con la pregunta (d), Simone no identifica que se haya realizado un movimiento para obtener la carta completa a partir de una de sus mitades. Esta respuesta busca propiciar la discusión sobre la dificultad de visualizar la rotación ya realizada y la falta de comprensión de que las transformaciones geométricas implican movimiento.

La producción de Camila para la pregunta (c) se ha incluido porque refleja una comprensión de la rotación como giro (término que designa el ángulo cuya amplitud es de 360°), pero no especifica la amplitud ni la dirección del ángulo. También describe el procedimiento de cómo se realiza la rotación, aunque de forma poco precisa, sin incluir todos los elementos fundamentales. La producción de Camila a la pregunta (d) permite discutir la dificultad —y el error asociado— de identificar el centro de rotación como el único punto que permanece fijo al realizar la rotación

(en la situación 1 pertenece a la figura), a pesar de identificarlo correctamente en la situación 2, donde se corresponde con uno de los vértices de la figura.

Estas producciones se han incluido para analizar los errores identificados y el conocimiento que implican —estrategias, procedimientos, propiedades y fundamentos de la rotación—, con el fin de atribuir significado a las formas en que el alumnado piensa matemáticamente. Se busca fomentar el hábito de una práctica interpretativa centrada en comprender las razones matemáticas que originan los errores, así como las estrategias y procedimientos utilizados para resolver la tarea, lo que implica repensar la propia formalización matemática. De este modo, la producción del alumnado se convierte en objeto de investigación e interpretación desde una perspectiva hermenéutica.

Si el profesorado en formación considera correcta la producción de Simone para la pregunta (c)-(i), esto evidencia que no domina los elementos fundamentales de la rotación, ya que es imprescindible especificarla en relación con un centro y un ángulo de rotación. En ese caso, quien dirige la formación debe plantear preguntas como: «¿La rotación es cualquier desplazamiento en el plano?». También debe cuestionar si la traslación no es también un desplazamiento y qué diferencia a estos movimientos, analizando sus elementos constitutivos y procedimientos. Si el profesorado en formación considera incorrecta únicamente la producción (c)-(ii) sin indicar por qué, significa que no comprende el error de Simone al interpretar el movimiento como dos traslaciones. Para desarrollar el conocimiento necesario, quien dirige la formación debe preguntar por qué se consideró incorrecta la respuesta, e insistir en que no basta con reconocer el error: como docente, es fundamental comprender las razones matemáticas que lo sustentan —en este caso, la falta de diferenciación entre las transformaciones geométricas—.

Respecto a la producción de Simone para la pregunta (d), es incorrecto afirmar que todos los puntos permanecen fijos en una rotación, ya que solo el centro de rotación es fijo; por ejemplo, en la situación 1, el centro de rotación corresponde al punto central de la carta. Quien dirige la formación debe cuestionar por qué esta respuesta es incorrecta y cuál es el error cometido por la alumna, y plantear si existe algún caso en el que todos los puntos sean fijos durante una rotación. Es importante discutir que, aunque en una rotación de 360° , los puntos parecen no moverse, en realidad cada punto coincide con su imagen tras la rotación, pero el único punto verdaderamente fijo es el centro de rotación. Además, conviene plantear si existe alguna otra situación en la que, aparte del centro, otros puntos permanezcan fijos, lo que permite introducir la discusión sobre la rotación identidad, en la que la amplitud del ángulo de rotación es 0° y todos los puntos permanecen en su lugar.

Si el profesorado en formación considera correcta la producción de Camila, que describe el movimiento de rotación como un giro pero sin especificar los elementos fundamentales, conviene preguntarle:

- ▶ ¿Es suficiente definir la rotación como un giro?
- ▶ ¿Qué es un giro?

- ▶ ¿Puede ser «cualquier» giro?
- ▶ ¿Qué diferencia un giro de otro?

El objetivo es que el profesorado en formación entienda que es necesario especificar el centro y el ángulo de rotación, y que no se puede asociar rotación con giro, porque este es el nombre de un ángulo específico de 360° . Además, si el profesorado en formación considera correcta la pregunta (c)-(ii), revelará que concede importancia a la dirección de la rotación ni al centro de rotación. Este aspecto es fundamental porque, dependiendo de la dirección, la imagen se ubica en uno u otro lugar del plano. En la situación 2 es necesario especificar qué «esquina» (vértice) de la figura se consideró para realizar la rotación.

Quien dirige la formación debe presentar algunos ejemplos (como en la figura 11.2) y plantear las siguientes cuestiones:

- ▶ ¿Se puede realizar el movimiento desde cualquier esquina de la carta?
- ▶ Al cambiar el sentido, ¿se obtiene el mismo resultado que en la situación 2?

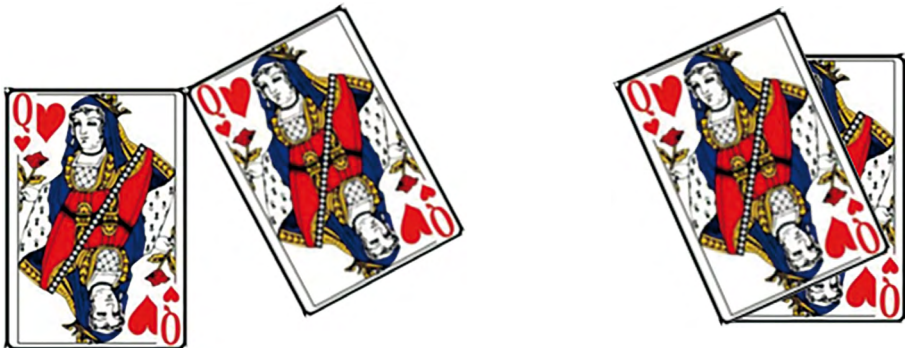


Figura 11.2. Ejemplos de rotación en la situación 2 de la tarea para el alumno, con distintos centros y sentidos.

Además, es posible que el profesorado en formación señale como incorrecta la parte de la producción de Camila en la que afirma que en la situación 1 no hay puntos fijos. Es fundamental que especifique el motivo de este error, es decir, el hecho de no reconocer que el centro de rotación es el único punto fijo.

La discusión sobre la pregunta 4.2 de esta parte de la tarea tiene como objetivo situar al profesorado en formación en el contexto de su práctica interpretativa e invitarlo a proponer una retroalimentación constructiva, lo que implica interpretar la producción del alumnado más allá de lo correcto y lo incorrecto. Supone considerar qué y cómo conoce el tópico y, a partir de ello, proponer orientaciones claras y concretas que lo ayuden a desarrollar su comprensión matemática.

Aunque se pide al profesorado en formación que proponga retroalimentación constructiva, es habitual que proponga retroalimentación de tipo evaluativo (solo indica el error en la producción del alumno) o de tipo instructivo (indica el error y explica cómo proceder para responder correctamente). Tomando como punto de partida para las discusiones la retroalimentación propuesta por cada grupo, quien dirige la formación debe discutirla y preguntar:

- ▶ ¿Es suficiente evaluar las producciones como correctas o incorrectas?
- ▶ ¿Cómo se puede proponer una retroalimentación que contribuya al desarrollo del conocimiento del alumnado sin enseñarle cómo hacerlo o «darle la respuesta»?
- ▶ ¿Es posible ofrecer alguna orientación que ayude al alumnado a revisar su producción, las estrategias y los procedimientos utilizados?
- ▶ ¿Qué preguntas habría que hacer al alumnado para ayudarlo a desarrollar su conocimiento matemático?

Estos son algunos ejemplos de preguntas que quien dirige la formación puede (y debe) hacer para que el profesorado en formación reflexione sobre retroalimentación que propuso y pueda, mediante las discusiones subsiguientes, desarrollar su conocimiento de modo que le permita modificar el tipo y el contenido de la retroalimentación. Además, si ninguna de las propuestas se considera constructiva, quien dirige la formación, junto con el profesorado en formación, debe elaborar una retroalimentación constructiva; para ello, es esencial haber preparado previamente un conjunto de posibilidades.

Objetivos específicos

- ▶ Desarrollar el conocimiento del profesorado en formación asociado a interpretar y atribuir significado a las formas de pensar y proceder del alumnado expresadas en sus producciones.
- ▶ Proponer retroalimentación sobre las producciones del alumnado y desarrollar el conocimiento especializado requerido.
- ▶ Desarrollar el conocimiento interpretativo del profesorado en formación.

Orientaciones didácticas

Una vez completada la parte II, quien dirige la formación asume un papel más activo: formula preguntas al profesorado en formación para validar (o no) el conocimiento matemático revelado en las producciones presentadas y discute la retroalimentación propuesta por cada grupo. Si esta es meramente evaluativa, debe cuestionar al profesorado en formación para que reflexione y proponga retroalimentación constructiva.

Esta parte II de la tarea, que contiene producciones de alumnado, tiene como objetivo dirigir la atención del profesorado en formación hacia las dificultades más

comunes que se presentan en relación con la rotación y, en consecuencia, los errores matemáticos cometidos. Cada producción se ha elegido por su potencial para la discusión matemática, tanto de manera individual como global, ya que permiten abordar las principales dificultades y errores del alumnado en la comprensión de la rotación. La pregunta 4.2 se puede ampliar solicitando al profesorado en formación que también proponga comentarios constructivos sobre las producciones de la otra alumna. En las discusiones propuestas, se solicita retroalimentación constructiva solo sobre las producciones de una alumna, dado que revelan un menor dominio del tópico de la rotación. Sin embargo, es importante discutir todas las producciones, ya que cada una se asocia a un conjunto de dificultades concretas y se complementan entre sí.

Se propone emplear 30 minutos para resolver la tarea en grupos y 40 minutos para la puesta en común y discusión de las respuestas.

Actividad 5. Sistematización

Descripción y rol de quien dirige la formación

Al final de la formación, quien dirige la formación debe revisar las respuestas del profesorado en formación a las preguntas de la parte preliminar (actividades 1 y 2) y plantear preguntas como, por ejemplo:

- ▶ Tras las discusiones, ¿mantienes o cambias tus respuestas?
- ▶ Justifica por qué las cambias o las mantienes.
- ▶ Entonces, ¿qué es la rotación?
- ▶ ¿Consideras que tus respuestas a la actividad 1 son matemáticamente adecuadas?
- ▶ Y con respecto a la actividad 2, ¿elegiste una definición matemáticamente válida de rotación?
- ▶ ¿Cambiarías ahora la definición elegida? ¿Por qué?

La discusión debe orientarse a validar las respuestas, con énfasis en el carácter incompleto de algunas de ellas y en la importancia de utilizar siempre una nomenclatura matemáticamente precisa para que se entienda correctamente qué es la rotación (pregunta primera). En este sentido, la rotación es una transformación geométrica isométrica que consiste en mover una figura alrededor de un punto fijo, llamado centro de rotación, o de una línea recta. Este movimiento rígido (desplazamiento angular) se realiza según la amplitud y dirección de un ángulo, llamado ángulo de rotación. La rotación es isométrica porque conserva las medidas de la figura original, es decir, mantiene las distancias y amplitud de los ángulos, de modo que todos los

puntos (originales) y sus correspondientes imágenes están a la misma distancia del centro de rotación, alrededor del cual se efectúa la transformación.

Respecto a la definición de rotación (segunda pregunta), debe quedar claro que las opciones 1, 2 y 3 no son definiciones, y que la 4, a pesar de serlo, necesita adaptarse a lo que el alumnado ya conoce y debe aprender en ese momento. Quien dirige la formación pregunta qué adaptaciones haría el profesorado en formación a esta definición para que resulte comprensible para el alumnado de séptimo grado (12-13 años). El objetivo es que, de manera colectiva, el profesorado en formación realice los cambios necesarios en el lenguaje, manteniendo el rigor matemático. Una posible simplificación es:

«Sea O un punto en el plano llamado centro de rotación y sea $\widehat{A\hat{O}B}$ un ángulo. La rotación de la amplitud de $\widehat{A\hat{O}B}$ alrededor del punto O es una operación que transforma el punto X en el punto X' , según la amplitud de $\widehat{A\hat{O}B}$ y una dirección determinada, de modo que la distancia entre O y X es la misma que entre O y X' ».

Objetivos específicos

- ▶ Alcanzar una comprensión consensuada de qué es la rotación y una posible definición matemáticamente válida.
- ▶ Simplificar una definición matemática de rotación para que el alumnado de séptimo grado (de 12-13 años) la comprenda.
- ▶ Orientaciones didácticas
- ▶ Para sistematizar las discusiones, quien dirige la formación debe formular preguntas que permitan reflexionar sobre las respuestas dadas por el profesorado en formación. Resulta útil ir registrando las respuestas, bien en la pizarra durante toda la formación, bien en una presentación que se pueda proyectar.

Referencias

- Abar, C. A. A. P. y Alencar, S. V. (2013). A gênese instrumental em propostas de atividades com o uso do Geogebra. En A. Gomes, A. Barbosa, E. Cunha, F. Fernandes, H. Martinho, H. Pinto, J. Pinto y N. Ferreira (eds.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 761-773). APM.
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. MEC, Secretaria de Educação Básica.
- Dolce, O. y Pompeo, J. N. (1993). *Fundamentos de matemática elementar: Vol. 9. Geometria plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta* (7.^a ed.). Atual.
- Gaspar, J. M. P. y Cabrita, I. (2014). GeoGebra e ferramentas tradicionais: Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias. En M. H. Martinho, R.

- A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida y L. Menezes (eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 169-190). APM.
- Giménez, J. y Vanegas, Y. (2019). Contextualizações de transformações geométricas na Educação Infantil. *Perspectivas da Educação Matemática*, 12(28), 56-73.
- Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. En H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre y C. Nunes (eds.), *Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 233-243). APM.
- Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55-72. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00004-X](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00004-X)
- Küchemann, D. (1980). Children's difficulties with single reflections and rotations. *Mathematics in School*, 9(2), 12-13.
- Lima, E. L. (1992). *Coordenadas no plano: geometria analítica, vetores e transformações geométricas* (2.^a ed. rev.). GRAFTEX Comunicação Visual.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.
- Paques, O. T. W. y Oliveira, S. R. (s.f.). *Oferenda musical de Bach* [Guia do professor]. Série Matemática na Escola, Universidade Estadual de Campinas. <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1143>
- Ribeiro, M., Almeida, A. y Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1-32. <https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13263>
- Ribeiro, M., Gibim, G. F. B. y Souza, C. A. D. (2021). *Coleção CIEspMat – Professor: Reflexão e Simetria*. CRV.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 11.3. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Atribuyendo significado a la rotación».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
			1	2	3	4	
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO		Diferentes formas de definir la rotación.	X				
		Elementos constitutivos de la rotación: figura inicial, centro o eje de rotación, ángulo de rotación (incluyendo su amplitud y dirección) e imagen o transformada.		X			
		Cómo diferenciar la rotación de otras transformaciones geométricas isométricas a través de sus fundamentos.			X		
		El centro de rotación es el único punto fijo en la rotación, excepto en la rotación identidad.				X	
		Concepto de ángulo (amplitud y dirección) como fundamento de la rotación.			X		
	KoT	Procedimientos	Procedimientos para doblar una figura exactamente por la mitad e identificar si ambas partes coinciden punto por punto, con el fin de identificar el reflejo y diferenciarlo de otras transformaciones geométricas isométricas.			X	
			Necesidad de girar todos los puntos de la figura según un ángulo determinado (entre 0° y 360°) alrededor del centro de rotación para que la figura y su imagen sean congruentes (todos los puntos de la figura coinciden con sus respectivos puntos en la imagen).			X	
			Procedimientos para efectuar la rotación y su diferencia respecto a los procedimientos involucrados en otras transformaciones geométricas isométricas.			X	
			El conjunto de procedimientos para efectuar la rotación es distinto del de la traslación.				X
			La rotación es una transformación geométrica isométrica relacionada con el movimiento de rotar: una operación que se aplica a una figura desde un punto central (rotación en torno a un punto) o una línea recta (rotación en torno a un eje), según la amplitud y dirección del ángulo de rotación.		X		
Fenomenología y aplicaciones		La rotación es una transformación geométrica isométrica relacionada con el movimiento de giro: una operación sobre la figura desde un punto central o una línea recta, según la amplitud y la dirección del ángulo de rotación.				X	

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades					
			1	2	3	4		
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KSM	Conexiones transversales	La congruencia es una idea matemática que conecta distintos contenidos, entre ellos la rotación y las demás transformaciones geométricas isométricas: al ser la rotación una transformación geométrica isométrica, se mantiene la congruencia entre formas, longitudes y ángulos de la figura en la imagen.		X			
	KPM	La práctica de definir	Características de una definición matemática que permiten diferenciarla de las pseudodefiniciones.	X				
			Una definición matemática es un conjunto mínimo de propiedades que permite identificar de forma unívoca la entidad matemática.	X				
		La práctica de demostrar	Formas de validar o no las matemáticas utilizadas para describir la rotación como movimiento, a partir de sus fundamentos.			X		
	El papel del lenguaje matemático	Necesidad de especificar el movimiento de rotación más allá del término «desplazamiento», que es general y también puede referirse a la traslación.			X			

Tabla 11.4. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Atribuyendo significado a la rotación».

Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades					
			1	2	3	4		
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KMT	Recursos didácticos (físicos o digitales)	El «mira» como recurso que permite ver el reflejo para diferenciarlo de la rotación.		X			
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Cómo reescribir una definición matemática de rotación con un lenguaje adecuado para el alumnado de séptimo grado (12-13 años).				X	
	KFLM	Fortalezas y debilidades	Errores y dificultades comunes del alumnado con la rotación.				X	

Hojas de trabajo

Atribuyendo significado a la rotación

ACTIVIDAD 1

Imagina que estás en la calle y alguien te pregunta: «En un contexto matemático, ¿qué es la rotación?». ¿Qué responderías? (Recuerda que es una conversación informal, no una explicación didáctica).

ACTIVIDAD 2

El profesor Mario tiene la intención de discutir la definición matemática de rotación con sus alumnos de séptimo grado (de 12-13 años). Ha encontrado algunas definiciones y quiere comentarlas en una formación del CIEspMat (<https://ciespmat.com.br>), ya que necesita ayuda para saber cuáles son más apropiadas para trabajar con sus alumnos.

Ayuda al profesor Mario a elegir las definiciones más adecuadas de entre las que se presentan a continuación y justifica por qué son o no definiciones válidas. Si requieren cambios, indica cuáles serían necesarios para que constituyan definiciones correctas de rotación.

Definiciones de rotación encontradas por el profesor Mario:

1. La rotación es la composición de dos reflexiones de ejes concurrentes.
2. En una rotación, cada figura gira respecto a un punto llamado **centro de rotación**. Las figuras original y la rotada tienen las mismas medidas, y sus elementos están a la misma distancia del centro de rotación.
3. La **simetría rotacional** se produce cuando una figura plana **gira alrededor de un punto**, según un ángulo (con una medida de apertura entre 0° y 360°), en una determinada **dirección** (en sentido horario o antihorario). Así se obtiene siempre una figura plana que mantiene la misma forma y tamaño que la original.
4. Sea O un punto tomado en el plano Π y sea $\alpha = A\hat{O}B$ un ángulo de vértice O . La rotación del ángulo α alrededor del punto O es la función $\rho_{O,\alpha}: \Pi \rightarrow \Pi$ definida de la siguiente manera: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ y, para cada punto, $X \neq O$ en Π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ es el punto del plano Π tal que

$$d(X,O) = d(X',O), \angle XO'X = \alpha$$

y el «sentido de rotación» de A a B es el mismo que el de X a X' .

ACTIVIDAD 3

Resuelve la siguiente tarea, dirigida al alumnado, sin pensar en un contexto de enseñanza.

Tarea para el alumnado: Cartas rotadas (adaptado de Paques y Oliveira)
(Explica siempre tu razonamiento describiendo el proceso que utilizas para responder. Puedes hacerlo mediante diagramas, palabras, cálculos, etc.).

1. Observa las dos situaciones siguientes. En cada situación tenemos una carta de la reina de corazones:



Situación 1



Situación 2

- a) Anota lo que te llamó la atención al observar la carta de cada situación.
- b) En la situación 1, identifica el movimiento realizado para construir la carta completa a partir de una de sus partes. Justifica tu respuesta.
- c) En la situación 2:
 - i) ¿Puedes identificar el movimiento realizado para obtener la carta en la nueva posición? En caso afirmativo, descríbelo. Si no, justifica por qué.
 - ii) Explica los procedimientos que seguiste para obtener la carta en la nueva posición (imagen).
- d) En cada situación, ¿puedes identificar un punto que permanezca fijo al realizar el movimiento? En caso afirmativo, indica cuál es y justifica tu respuesta.

A partir de tu resolución, responde a las siguientes preguntas:

3.1. ¿Cuáles crees que serán las mayores dificultades matemáticas del alumnado al resolver esta tarea? Justifica tu respuesta.

3.2. ¿Qué conocimientos consideras que necesita el alumnado para realizar esta tarea? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD 4

Tras proponer esta tarea a su alumnado de séptimo grado, el profesor Mario recogió algunas respuestas y decidió compartirlas en la formación del CIEspMat. A continuación se presentan las producciones de las estudiantes Simone y Camila respecto a las preguntas (c) y (d) de la tarea:

c) i) O movimento é um deslocamento.
ii) A carta foi arrastada para direita e para baixo.

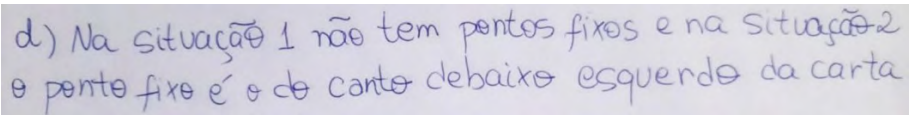
c) i) El movimiento es un desplazamiento.
ii) La carta superior fue arrastrada hacia la derecha y hacia abajo. Producción de Simone para la pregunta (c).
Producción de Simone para la pregunta (c).

c) i) Apenas a carta foi girada um pouquinho.
ii) Você pega a carta e coloca o dedo em um canto e gira.

c) i) Solo la carta fue girada un poco.
ii) Tomas la carta y colocas un dedo en una esquina y la giras.
Producción de Camila para la pregunta (c).

d) Todos os pontos são fixos.

d) Todos los puntos son fijos.
Producción de Simone para la pregunta (d).



d) Na situação 1 não tem pontos fixos e na situação 2 o ponto fixo é o do canto de baixo esquerdo da carta

d) En la situación 1, no tiene puntos fijos, y en la situación 2, el punto fijo está en la esquina inferior izquierda de la carta.

Producción de Camila para la pregunta (d).

- 4.1. Para cada producción, indica si la consideras matemáticamente correcta (adecuada) o no, y justifica el razonamiento matemático evidenciado.
- 4.2. Para las producciones de Simone, proporciona retroalimentación constructiva: en lugar de indicar si son correctas o incorrectas, atribuye significado a sus resoluciones para ayudarla a desarrollar su conocimiento matemático.

12. Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación de matemáticas en el contexto de división de fracciones

Gabriela Gibim

<https://orcid.org/0000-0002-7588-3579>

Universidade Estadual de Campinas (Brasil)

Laura Rifo

<https://orcid.org/0000-0002-1579-8073>

Universidade Estadual de Campinas (Brasil)

Nuria Climent

<https://orcid.org/0000-0002-0064-1452>

Universidad de Huelva (España)

Miguel Ribeiro

<https://orcid.org/0000-0003-3505-4431>

Universidade Estadual de Campinas (Brasil)

Formación continua

Nivel al que se dirige la tarea: Grado de Maestro en Educación Primaria y Secundaria

Duración aproximada de la aplicación: 3 horas

Fundamentación

La comprensión del profesorado en formación sobre la división de fracciones ha recibido la atención constante de los investigadores a lo largo del tiempo, con un aumento progresivo del número de publicaciones al respecto (Lee, 2017). Este tema resulta importante y necesario, pues es desafiante tanto desde el punto de vista del aprendizaje como de la enseñanza (Lamon, 2020).

Así, es necesario que el profesorado en formación profundice en su conocimiento matemático sobre la división de fracciones para potenciar el entendimiento matemático del alumnado. Por eso, proponemos una tarea orientada a acceder y a desarrollar el conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación sobre la división de fracciones. La tarea aborda los siguientes elementos sobre la división de fracciones: los sentidos —partitivo y medida— de la división (Simon, 1993); la justificación del algoritmo inversión-multiplicación⁴ (IM) (Lee, 2017); la representación de la división de fracciones (Lo y Luo, 2012); la elaboración de problemas (Ma, 1999); la estimación al resolver la división de fracciones (Brocardo *et al.*, 2003); el conocimiento de las dificultades del alumnado con esta operación (Bicknell *et al.*, 2015; Downton, 2009); los recursos para su enseñanza (Sharpe, 1998); el conocimiento de diferentes algoritmos y estrategias para la resolución de la división de fracciones, y el conocimiento interpretativo por parte del profesor para proporcionar retroalimentación constructiva (Jakobsen *et al.*, 2014).

Entendemos que la formación docente, tanto inicial como continua, debe desarrollar de manera amplia y profunda el conocimiento especializado del profesorado en formación, así como su conocimiento interpretativo. Esta tarea puede contribuir al desarrollo de nuevos conocimientos sobre la división de fracciones.

Objetivos generales

Se pretende que el profesorado en formación:

1. Resuelva la división de fracciones mediante distintas estrategias de estimación y diferentes procedimientos.
2. Reflexione sobre posibles dificultades del alumnado Educación Secundaria al resolver este tipo de operaciones.
3. Conozca algunas estrategias de enseñanza para atender dichas dificultades de manera inclusiva, basadas en el uso de material manipulativo y representación pictórica.
4. Justifique y comprenda el procedimiento de inversión y multiplicación.
5. Elabore problemas (sentidos de la división).
6. Interprete las diferentes producciones de los alumnos y proporcione retroalimentación constructiva.

4. El algoritmo IM (inversión-multiplicación) consiste en invertir el divisor y multiplicar el dividendo por esta nueva fracción: $ab : cd = ab \times dc$, con a, b, c, d números enteros, b y d no nulos.

Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias

Para abordar la actividad, el profesorado en formación debe tener conocimientos sobre:

- ▶ Sentidos de la división.
- ▶ Concepto de fracciones y sus operaciones.
- ▶ Representación de fracciones.

Orientaciones generales para quien dirige la formación

Esta tarea parte de una situación hipotética en la que, en una clase de primero de Secundaria (13 años), se propone al alumnado resolver cuatro operaciones:

1. $5 \div 2$

2. $\frac{2}{5} \div 4$

3. $7 \div \frac{1}{2}$

4. $\frac{2}{5} \div \frac{2}{5}$

A partir de estas operaciones se pide al profesorado en formación realizar una serie de actividades que le permitan reflexionar en profundidad sobre su práctica, tanto al resolver las operaciones como en su rol de docente.

Quien dirige la formación puede entregar cada una de las actividades de la tarea al profesorado en formación y dar unos minutos para resolverla (individualmente o en grupos pequeños), de modo que pueda escribir sus soluciones y respuestas en una hoja. Al finalizarla, se realiza una plenaria para discutir las soluciones desarrolladas, con preguntas que problematicen las decisiones observadas en las producciones. Por ejemplo, se sugiere preguntar siempre al profesorado en formación cómo lo hizo y pedirle que explique su producción, para conocer mejor su comprensión del tema, así como para obtener evidencias de su aprendizaje.

Como la tarea tiene diversos momentos de reflexión conjunta, puede ser interesante pedir al profesorado en formación que conserve ambas respuestas: la inicial y la elaborada después de la discusión en clase. Conviene tener en cuenta que el profesorado en formación puede presentar dificultades similares a las del alumnado (como, por ejemplo, no saber

justificar el procedimiento de invertir y multiplicar o representar incorrectamente la operación). Asimismo, puede conocer solo una estrategia de resolución de la división de fracciones o tener dificultades para elaborar correctamente un problema de división de fracciones.

En la puesta en común, quien dirige la formación puede introducir algunas ideas de cuestiones que no hayan surgido, como posibles dificultades del alumnado o recursos. Esta tarea serviría de introducción para poder trabajar después con mayor profundidad estos aspectos.

Recursos físicos o virtuales

- ▶ Ficha de trabajo.
- ▶ Hojas blancas suficientes para registrar las respuestas de la tarea.

Actividad 1. Resolución de una tarea matemática escolar

1.1. Resolver operaciones sin recurrir al algoritmo

Descripción

Se pide al profesorado en formación que, sin recurrir al algoritmo, indique el valor aproximado o exacto de cada expresión y explique su razonamiento.

Una vez resuelto, quien dirige la formación puede iniciar una discusión acerca de las estrategias que el profesorado en formación haya trabajado individualmente o en grupo. Durante la puesta en común, el profesorado en formación podrá plantear sus resoluciones, además de analizar y discutir las estrategias utilizadas. Es esencial debatir la importancia de enseñar las divisiones de fracciones más allá del algoritmo para propiciar la reflexión sobre el sentido numérico y las operaciones, el cálculo mental y la estimación. Esta reflexión es relevante, puesto que desarrollar la capacidad de anticipar —es decir, estimar previamente el valor aproximado de la respuesta— permite analizar si una respuesta dada a una operación es coherente o no, o si tiene sentido.

Objetivos específicos

- ▶ Conocer diferentes estrategias para resolver la división de fracciones sin recurrir al algoritmo.
- ▶ Analizar las posibles dificultades relacionadas con el sentido numérico, las operaciones, el cálculo mental y la estimación.

Orientaciones didácticas

Algunas veces, el profesorado en formación realiza inversiones y multiplicaciones mentalmente; al explicar cómo piensa, a menudo simplemente describe los pasos del algoritmo de inversión-multiplicación para dividir fracciones. Esto ocurre porque el algoritmo suele ser la estrategia de cálculo principal, y a veces la única, que utiliza el profesorado en formación para resolver la división de fracciones. Entendemos que esto se debe a un aprendizaje prematuro del algoritmo que limita el desarrollo de otras estrategias, como el cálculo mental, la estimación o el sentido numérico.

Se propone trabajar la actividad de la tarea en equipos de 2 a 4 personas o individualmente.

Se sugiere que quien dirige la formación modere la discusión, guíe la actividad y señale aspectos importantes sobre las cuestiones que se analizan. Asimismo, orienta las reflexiones sobre las estrategias de resolución de los distintos equipos para alcanzar los objetivos planteados y desarrollar los conocimientos especializados propuestos de manera constructiva a través de la reflexión colectiva.

1.2. Resolver operaciones indicando el valor exacto

Descripción

En esta parte de la actividad se pide al profesorado en formación resolver cada una de las expresiones indicando el valor exacto y el proceso seguido para encontrar la respuesta.

Se pretende, de este modo, conocer qué procedimientos utiliza el profesorado en formación en su práctica docente, así como desarrollar el conocimiento de diferentes procedimientos históricos producidos culturalmente —invertir-multiplicar, productos cruzados, regla de sándwiches, calculadora, transformación en decimales, etc.—, con la intención de ampliar su espacio de solución.

Objetivo específico

- ▶ Identificar qué procedimientos conoce y utiliza el profesorado en formación para la resolución de la división de fracciones.

Orientaciones didácticas

Se recomienda partir de los procedimientos que el profesorado en formación conoce para explorar diferentes estrategias de resolución de la división de fracciones, como, por ejemplo: invertir y multiplicar (IM); reducir fracciones a un denominador común

y dividir los numeradores —lo que llamaremos igualar denominadores (ID)—; conversión de fracciones a decimales (CD) —que es un caso particular del anterior en que el denominador común es una potencia de 10—; productos cruzados (PC); uso de la unidad fraccionaria (UF) para descubrir el valor unitario de una cantidad en función de otra; uso del protocolo de calculadora científica (CALC); dividir numeradores y denominadores entre sí (DND). Los algoritmos DND e ID no deben abordarse en este momento, ya que se discutirán en la actividad 3.

Se propone continuar trabajando en los mismos equipos y con el modelo de puesta en común en plenaria para comparar distintas reflexiones y contrastar respuestas. Quien dirige la formación participa en la discusión con los grupos sobre los diferentes algoritmos existentes para la resolución de la división de fracciones, y formula preguntas que orienten la discusión y generen nuevas preguntas y reflexiones sobre el tema.

Tabla 12.1. Nomenclatura de distintos algoritmos para la división de fracciones.

Nomenclatura (Sigla)	Descripción del algoritmo	Algoritmo
Invertir y multiplicar (IM)	Multiplicar la primera fracción por el inverso de la segunda.	$\frac{a}{c} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
Igualar los denominadores (ID)	Transformar las fracciones para que tengan el mismo denominador y dividir los numeradores.	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{cb}{db} = \frac{ad}{cb}$
Conversión de fracciones a decimales (CD)	Transformar ambas fracciones en números decimales y dividir.	$\frac{a}{c} \div \frac{c}{d} = \frac{ax}{bx} \div \frac{cy}{dy} = \frac{ax}{cy} = \frac{ad}{bc}$, siendo $b \cdot x = d \cdot y$, potencias de 10.
Productos cruzados (PC)	Usado para verificar igualdad o encontrar una fracción equivalente.	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
Uso de la unidad fraccionaria (UF)	Pensar en cuántas veces la segunda fracción cabe en la primera.	Si $\frac{a}{b}$ equivale a $\frac{c}{d}$, entonces $\frac{1}{d}$ equivale a $\frac{a}{bc}$ y la unidad $\frac{d}{d}$ equivale a $\frac{ad}{bc}$.
Uso del protocolo de la calculadora científica (CALC)	Insertar fracciones o decimales directamente en la calculadora.	$2 a^{\frac{b}{c}} 3 \div 1 a^{\frac{b}{c}} 5 = 10_3$
Dividir numeradores y denominadores entre sí (DND)	Dividir numeradores y denominadores entre sí.	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div d}{b \div d}$ caso particular: a es múltiplo de c y b es múltiplo de d. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c \cdot d}{b \cdot c \cdot d} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d}$ caso general

Conviene resaltar que existen dos reglas nemotécnicas asociadas al algoritmo de inversión y multiplicación: multiplicación cruzada $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}\right)$ y regla del sándwich $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left[\frac{a/b}{c/d}\right] = \frac{ad}{bd}\right)$.

Es importante que el profesorado en formación desarrolle el conocimiento de diferentes maneras de resolver la división, de modo que pueda ampliar los límites de su espacio de solución (a menudo reducido a una única estrategia de resolución). La noción de espacio de solución se relaciona con la naturaleza del conocimiento matemático que posee el profesorado en formación, entendido como un conjunto de posibles respuestas, diferentes formas de abordar un problema y distintas representaciones matemáticas para su resolución, incluso si este problema tiene una única solución. Así, el espacio de solución está asociado al conocimiento matemático especializado del profesorado en formación respecto a definiciones, conceptos, representaciones y procesos de un mismo tema. Activar el conocimiento interpretativo exige adquirir nuevos conocimientos que permitan superar los límites del propio espacio de solución.

1.3. Formular problemas

Descripción

En esta parte se pide al profesorado en formación que formule problemas individualmente o en grupo (según las operaciones solicitadas) con el objetivo de revelar su conocimiento sobre la división de fracciones. Aquí, quien dirige la formación debe tener en cuenta la estructura de los problemas creados (relacionada con los sentidos de la división), las representaciones pictóricas presentadas (discretas o continuas), así como la correspondencia entre el problema y la operación solicitada. Generalmente, el profesorado en formación afronta desafíos a la hora de formular problemas, ya que la formulación de problemas no suele formar parte de su experiencia como estudiante ni como docente. Esto se acentúa cuando el divisor y el dividendo son fracciones, ya que se requiere conocimiento del concepto de fracción, de división y de representación. Conviene tener en mente que el profesorado en formación muchas veces formula problemas con un solo sentido de la división porque desconoce el otro sentido (partitivo o medida, Simon, 1993), o puede formular problemas que no corresponden a la operación solicitada (problemas de multiplicación y no de división). Además, la representación supone un desafío porque implica división de fracciones, especialmente cuando la fracción no es unitaria, ya que pone en juego el conocimiento de representaciones discretas y continuas. Durante la plenaria se puede reflexionar con el profesorado en formación sobre si las representaciones ilustran la resolución del problema.

Objetivos específicos

- ▶ Formular problemas de división de fracciones.

- ▶ Analizar las potencialidades y limitaciones de cada problema en función de lo que se quiere enseñar.

Orientaciones didácticas

Se propone una discusión y reflexión sobre los sentidos de la división de fracciones, tanto con números naturales como con racionales, para que el profesorado en formación pueda trabajar diferentes problemas con los estudiantes inicialmente con números naturales y posteriormente con fracciones. Eso podría contribuir al aprendizaje de la división de fracciones.

Quien dirige la formación se centra en plantear y guiar la discusión, orientando la reflexión hacia la comparación de los problemas (sentidos) y las distintas formas de representación y resolución.

1.4. Resolver el problema

Descripción

En esta parte de la actividad, se pide al profesorado en formación que resuelva un problema individualmente o en grupo con el objetivo de poner de manifiesto su conocimiento sobre la resolución de problemas, las estrategias y los fundamentos matemáticos relacionados con la división de fracciones.

Objetivos específicos

- ▶ Resolver de forma justificada los problemas de división con fracciones.
- ▶ Analizar las dificultades encontradas, así como las diferentes estrategias y soluciones.

Orientaciones didácticas

Se solicita al profesorado en formación que resuelva el problema y muestre su resolución por medio de cálculos, dibujos o palabras. Se comparan las producciones del profesorado en formación y se reflexiona sobre las diferentes estrategias de solución.

Quien dirige la formación propicia la discusión y la reflexión sobre las dificultades encontradas y las distintas formas de resolver el problema.

Actividad 2. Enseñanza de la división de fracciones

2.1. Representar de dos maneras diferentes

Descripción

En esta actividad, quien dirige la formación invita al profesorado en formación a representar las operaciones de al menos dos maneras diferentes, con especial atención a las discusiones y soluciones presentadas, ya que pueden surgir dificultades en el uso de representaciones visuales para explicar la división de fracciones. Esto se debe a que el profesorado en formación suele estar acostumbrado a representar fracciones, pero no sus operaciones. Durante la sesión plenaria, quien dirige la formación puede observar si esto supone un desafío mayor cuando las fracciones no son unitarias (esto es, con numerador distinto de 1). Además, conviene analizar conjuntamente si las explicaciones orales del profesorado en formación son coherentes con sus representaciones; por ejemplo, si se hace una representación partitiva pero se explica utilizando el lenguaje matemático del sentido de medida. Otra cuestión importante es la relación entre una fracción y su unidad de referencia, y la comprensión de que la cantidad varía a medida que cambia dicha referencia.

Objetivo específico

- ▶ Conocer qué entiende el profesorado en formación por distintas representaciones y si es consciente de las diferentes formas de exteriorizar una imagen mental (pictórica, simbólica o gráfica).

Orientaciones didácticas

Conviene destacar la importancia de conocer diferentes representaciones y su conexión con la notación simbólica y la formulación de problemas.

Quien dirige la formación plantea y guía la discusión, y orienta la reflexión hacia la comparación de estrategias, formas de pensamiento y representaciones.

2.2. Dificultades de los estudiantes

Descripción

En esta parte de la actividad, se pide al profesorado en formación que identifique las posibles dificultades del alumnado al resolver las operaciones planteadas.

Durante la plenaria, quien dirige la formación puede detectar si las dificultades enumeradas por el profesorado en formación son conceptuales o procedimentales y propiciar una discusión al respecto. Esto es relevante porque el profesorado en formación a menudo identifica únicamente dificultades con el algoritmo —es decir, su uso incorrecto—, centrándose solo en las dificultades de procedimiento. También puede ocurrir que no enumere ninguna dificultad, o que enumere sus propias dificultades a la hora de resolver la tarea en lugar de las del alumnado.

Objetivo específico

- ▶ Reflexionar sobre el propio conocimiento acerca de las dificultades que podría encontrar el alumnado al resolver tareas de división de fracciones.

Orientaciones didácticas

Se introducen cuestiones sobre la necesidad y relevancia de propiciar un aprendizaje más conceptual que procedimental.

Quien dirige la formación se centra en discutir algunas de las dificultades conceptuales y procedimentales que puede encontrar el alumnado en la división de fracciones.

2.3. Recursos y estrategias para la enseñanza de la división de fracciones

Descripción

Se solicita al profesorado en formación reflexione sobre cómo enseñaría la división de fracciones a una clase de primero de Secundaria, qué recursos utilizaría y con qué propósito.

En esta tarea, las discusiones del profesorado en formación pueden ser escasas, ya que tiende a enseñar la división de fracciones de forma procedimental, centrándose en el algoritmo, por ser la forma en que aprendió como estudiante y como suele presentarse en los libros de texto. Por ello, es importante que quien dirige la formación formule preguntas para generar debate sobre los recursos. Por ejemplo, el profesorado en formación puede decir que utiliza el tangram; en tal caso, conviene pedirle que dé un ejemplo y explique cómo lo utiliza para enseñar la división de fracciones. Es común que el profesorado en formación conozca algunos recursos, como *software*, tiras de fracciones o tangram, pero encuentre dificultades para explicar cómo utilizarlos en la enseñanza de la división de fracciones.

Objetivo específico

- Conocer la práctica del profesorado en formación en la enseñanza de la división de fracciones: cómo enseña, qué ejemplos, procedimientos, estrategias y recursos materiales o virtuales utiliza.

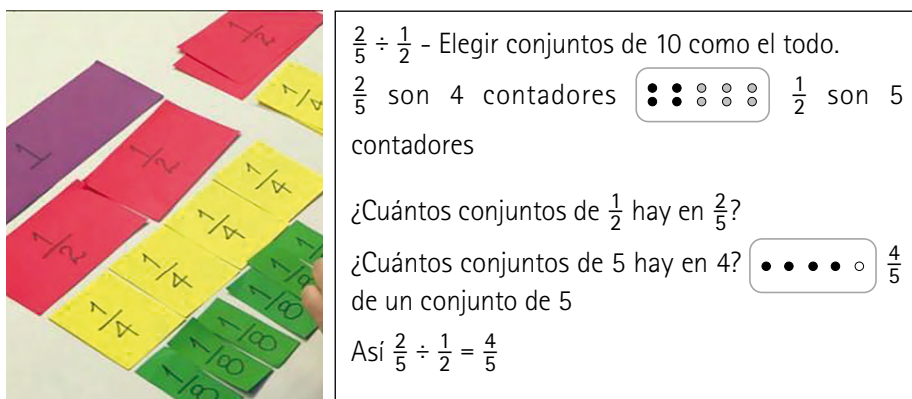
Orientaciones didácticas

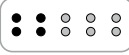
Se introducen cuestiones sobre la necesidad y relevancia de propiciar un aprendizaje más conceptual que procedimental.

Quien dirige la formación puede proponer resolver la actividad con el uso de materiales manipulativos. Para ello, puede llevar algunos materiales, como contadores, mallas, papel cuadriculado o muro de fracciones.


También pueden proponerse recursos virtuales como Geogebra, Toy Theater (<https://toytheater.com/fraction-strips/>) o Fraction by the Math Learning Center (<https://apps.mathlearningcenter.org/fractions/>).

Quien dirige la formación debe tener conocimiento de la intencionalidad matemática del uso de los materiales. Por ejemplo, cuando se usa la tira de fracciones para entender el concepto de división, conviene emplear ejemplos con números contenidos en la tira, para no tener que construir otra. Con la tira de abajo, se puede pensar en divisiones como $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$; $1 \div \frac{1}{2}$; $\frac{1}{8} \div \frac{1}{4}$ por ejemplo, que facilitan la comprensión del concepto. Además, los contadores (fichas) deben usarse para cantidades discretas en la división partitiva o de medida, como el ejemplo que se muestra a continuación (figura 12.1):



$\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ - Elegir conjuntos de 10 como el todo.
 $\frac{2}{5}$ son 4 contadores  $\frac{1}{2}$ son 5 contadores

¿Cuántos conjuntos de $\frac{1}{2}$ hay en $\frac{2}{5}$?

¿Cuántos conjuntos de 5 hay en 4?  $\frac{4}{5}$
de un conjunto de 5

Así $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$

Figura 12.1. Ejemplos de representación de la división de fracciones con material manipulativo.

Quien dirige la formación centra su participación en describir algunos ejemplos de recursos para la enseñanza de la división de fracciones.

2.4. Justificación de los algoritmos

Se plantea al profesorado en formación la respuesta hipotética de un estudiante de primero de Secundaria:

Gabriel: Maestra, ¿por qué tenemos que multiplicar para resolver una división de fracciones? Es decir, ¿por qué al dividir por una fracción invertimos el divisor y multiplicamos para obtener el resultado?

A partir de la intervención de este alumno, se solicita al profesorado en formación que explique cómo respondería y qué representaciones utilizaría.

Descripción

Esta parte de la actividad retoma el caso del estudiante Gabriel y plantea la reflexión sobre por qué, para resolver una división de fracción, hay que multiplicar; es decir, se trata de justificar el algoritmo inversión-multiplicación y de pensar qué representación pictórica podría utilizarse. La pregunta permite discutir la importancia de comprender el algoritmo más allá de la regla y de representarlo pictóricamente, de modo que el algoritmo, la representación pictórica y el lenguaje matemático se correspondan entre sí.

Objetivo específico

- ▶ Conocer los fundamentos del procedimiento inversión-multiplicación, su validación y representación pictórica.

Orientaciones didácticas

Se puede validar algebraica y pictóricamente el algoritmo IM mediante diferentes tipos de representación (discreta y continua) y ambos sentidos de la división (partitivo y de medida).

Quien dirige la formación centra su participación en presentar algunos ejemplos que faciliten la comprensión del algoritmo inversión-multiplicación, así como su validación y representación.

Actividad 3. Interpretación y validación de diferentes producciones de alumnado

Descripción

Esta actividad aborda el conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación a través del análisis de las respuestas de tres alumnos (Luis, Rafael y Mónica) a la operación :

$$\text{Luis: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Rafael: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12 : 3}{15 : 5} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Mónica: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12}{15} : \frac{9}{15} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Figura 12.2. Procesos de resolución de divisiones de fracciones.

3.1. Evaluación de la corrección matemática de las respuestas

En esta actividad se pide al profesorado en formación que analice si las producciones de los alumnos son matemáticamente correctas.

Cada producción se ha incluido con un objetivo específico. La producción de Luis corresponde a lo que suele considerarse el algoritmo para dividir dos cantidades en representación fraccionaria –invertir y multiplicar–, que es el que aparece en los libros de texto y se enseña habitualmente al alumnado. La producción de Rafael presenta un algoritmo consistente en dividir numerador entre numerador y denominador entre denominador, que, en general, suele considerarse inadecuado a pesar de ser matemáticamente correcto, y, además, muchos docentes lo desconocen. La producción de Mónica representa la oportunidad de discutir un algoritmo basado en el concepto de fracciones equivalentes. En esta tarea se pretende descubrir qué revela el profesorado en formación sobre las formas de resolución y razonamiento asociados con la determinación del resultado de una división que involucra fracciones: si conoce, o no, las estrategias empleadas por los estudiantes y cómo las interpreta y valida matemáticamente.

Objetivo específico

- ▶ Desarrollar el conocimiento interpretativo del profesorado en formación ante producciones inusuales del alumnado en la división de fracciones.

Orientaciones didácticas

El profesorado en formación suele tener dificultades para justificar el algoritmo de división de fracciones mediante una representación pictórica o algebraica. Esta limitación puede interferir en la forma en que evalúa e interpreta los razonamientos matemáticos realizados por el alumnado (en términos de aceptarlos, refutarlos o completarlos), así como en la elaboración de explicaciones instruccionales. Conviene tener en cuenta que, cuando se presentan razonamientos no estándar como el de Mónica, el profesorado en formación puede sentir cierto malestar si tiene dificultades para validarlos. Sin embargo, este malestar y las discusiones que genera son importantes para ampliar su espacio de solución.

La participación de quien dirige la formación se centra en propiciar la discusión sobre razonamientos matemáticos distintos, con el objetivo de conocerlos, valorarlos y comprenderlos, así como de abordar cuestiones de generalización. También conviene enfatizar la importancia de la interpretación de las producciones de los estudiantes.

3.2. Feedback constructivo a los estudiantes

Descripción

Esta parte de la actividad aborda el conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación, es decir, los conocimientos matemáticos especializados que permiten proporcionar retroalimentación constructiva y ayudar al alumnado a desarrollar su comprensión matemática de la división de fracciones. Durante la retroalimentación se debe animar al alumnado a mejorar su producción, analizar sus respuestas y reformular su razonamiento mediante estrategias diferentes y eficientes.

Objetivo específico

- ▶ Desarrollar conocimiento sobre cómo proporcionar retroalimentación constructiva ante producciones del alumnado sobre la división de fracciones.

Orientaciones didácticas

Parte del profesorado en formación puede proporcionar retroalimentación meramente descriptiva sobre cómo resolver el problema (por ejemplo, aplicando el método de inversión-multiplicación). Sus dificultades pueden interferir en la estrategia utilizada para ampliar el conocimiento matemático de los estudiantes, así como en la forma en que interpreta los razonamientos del alumnado —por ejemplo, si los acepta o no—. Se trata de pasar de una retroalimentación descriptiva, si fuera el caso, a una constructiva.

Quien dirige la formación promueve la discusión y la reflexión sobre la retroalimentación que conviene dar al alumnado para contribuir a su aprendizaje.

3.3. Enseñanza

Descripción

Esta actividad aborda el conocimiento especializado sobre la enseñanza de la división de fracciones, en particular sobre las diferentes formas de enseñar.

Objetivo específico

- ▶ Reconocer los conocimientos que el profesorado en formación ha logrado incorporar a lo largo de la tarea y cómo los aplicaría en su labor docente.

Orientaciones didácticas

En este momento, quien dirige la formación debe centrar la discusión en las ventajas y desventajas del uso de los algoritmos como recetas únicas para el trabajo con operaciones. Se busca que el profesorado en formación incorpore a su enseñanza nuevos métodos y formas de trabajo para la resolución de estas operaciones que ayuden al alumnado a dar sentido y significado a la división de fracciones.

Referencias

- Bicknell, B., Young-Loveridge, J., Lelieveld, J. y Brooker, J. (2015). Using multiplication and division contexts with young children to develop part-whole thinking. *Research Information for Teachers*, 2, 53-59. <https://doi.org/10.18296/set.0018>
- Brocardo, J., Serrazina, L. y Kraemer, J. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação Matemática*, (75), 11-15.
- Downton, A. (2009). It seems to matter not whether it is partitive or quotitive division when solving one step division problems. En R. Hunter, B. Bicknell y T. Burgess (eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 161-168). MERGA.
- Jakobsen, A., Ribeiro, M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19, 135-150.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential knowledge and instructional strategies for teachers* (4.ª ed.). Routledge.

- Lee, M. Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 327-348.
- Lo, J. J. y Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(6), 481-500.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum.
- Sharpe, J. (1998). A constructed algorithm for the division of fractions. En L. J. Morrow y M. J. Kenny (eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 198-203). National Council of Teachers of Mathematics.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 233-254.

MTSK trabajado en la tarea

Tabla 12.2. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación de matemáticas en el contexto de división de fracciones a través de una tarea de formación».

Subdominio	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades			
			1	2	3	
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Sentido numérico y de las operaciones.	1.1			
		Estimaciones y cálculo mental.	1.1			
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	División y multiplicación como operaciones inversas.	1.3		
			La relación entre el todo, el divisor y el dividendo.	1.4		
		Flexibilidad en la unidad de referencia.	2.1 2.4			
		Procedimientos	Estrategias para resolver la división de fracciones sin recurrir al algoritmo.	1.1		
			Distintos procedimientos para dividir fracciones.	1.2		
		Fenomenología y aplicaciones	Sentidos de la división (partición y medida).	1.3 2.4		
		Registros de representación	Conocimiento de lenguaje aritmético, común y figural.	2.1		
			Representación pictórica del algoritmo IM.	2.4		
	KPM	La práctica de resolver problemas	Procesos asociados a la resolución de problemas.	1.3		
		La práctica de demostrar	Formas de validar diferentes procedimientos de la división de fracciones (algebraica y pictórica).	3.1		

Tabla 12.3 Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación de matemáticas en el contexto de división de fracciones a través de una tarea de formación».

Subdominio	Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades			
			1	2	3	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Fortalezas y debilidades	Dificultades relacionadas con las operaciones, como, por ejemplo, la idea errónea de que, si dividimos, siempre obtenemos un cociente menor que el dividendo.	1.1		
			Habilidades y obstáculos en el proceso de generalización, como al registrar, organizar y relacionar los datos.	1.3		
			Dificultades relacionadas con la comprensión del problema y la estrategia de resolución. Habilidades de visualización y cálculo.	1.4		
			Dificultades conceptuales y procedimentales: relacionadas con el concepto de fracción y el sentido de la división (conceptuales), o procedimentales (al hacer la división utilizando un algoritmo incorrectamente, por ejemplo).		2.1	
	KMT	Recursos didácticos	Uso del dibujo, sus potencialidades y limitaciones.	1.4		
			Uso de la representación pictórica, materiales físicos y virtuales.		2.3	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Estrategias de enseñanza que apoyan la implementación de una retroalimentación constructiva que ayude a los estudiantes a desarrollar su comprensión matemática.			3.1
			Estrategias de enseñanza para la división de fracciones.		2.3	3.3

Hojas de trabajo

Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación de Matemáticas en el contexto de división de fracciones a través de una tarea de formación

Estas actividades pueden resolverse de manera individual o en pequeños grupos de cuatro personas, con el fin de compartir con tus compañeros el máximo número de estrategias de resolución diferentes.

Equipo:

ACTIVIDAD 1. Resolución de una tarea matemática escolar

En una clase de primero de Secundaria se propone al alumnado resolver las siguientes operaciones:

1. $5 \div 2$

2. $\frac{2}{5} \div 4$

3. $7 \div \frac{1}{2}$

4. $\frac{2}{5} \div \frac{2}{5}$

1.1 Sin recurrir al algoritmo, indica el valor aproximado o exacto de cada expresión. Explica tu razonamiento.

1.2 Resuelve cada expresión indicando el valor exacto y el proceso seguido para encontrar la respuesta.

1.3 Formula un problema para cada expresión, de modo que su resolución implique dicha expresión.

1.4 Resuelve los problemas que has formulado con el mayor detalle posible.

ACTIVIDAD 2. Enseñanza de la división de fracciones

Considerando las operaciones de la tarea anterior:

2.1 Representa de al menos dos formas diferentes (mediante diagramas, palabras, cálculos, dibujos, etc.) cada una de las expresiones 1, 2, 3 y 4. Justifica tu respuesta.

2.2 Indica un conjunto de posibles dificultades específicas que el alumnado puede presentar al resolver esta tarea (indica el curso al que te refieres).

2.3 Si tuvieras que enseñar división de fracciones a una clase de primero de Secundaria, ¿cómo lo harías? ¿Usarías algún recurso? ¿Cuáles? ¿Con qué propósito?

2.4 Un estudiante de primero de Secundaria, al resolver la tarea, preguntó:

Gabriel: Maestra, ¿por qué tenemos que multiplicar para resolver una división de fracciones? Es decir, ¿por qué, al dividir por una fracción, invertimos el divisor y multiplicamos para obtener el resultado?

2.4.1 ¿Qué le dirías a Gabriel? Justifica tu respuesta.

2.4.2 ¿Qué representación puedes usar para dar significado al comentario de Gabriel?

ACTIVIDAD 3. Interpretación y validación de diferentes producciones de alumnado

La maestra Paula implementó esta tarea en sus clases de primero de Secundaria y obtuvo de parte de sus alumnos algunas producciones diferentes de las previstas. A continuación se presentan tres de ellas.

Tres estudiantes de Secundaria resolvieron la siguiente operación de esta manera:

$$\text{Luís: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Rafael: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12 : 3}{15 : 5} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Mônica: } \frac{12}{15} : \frac{3}{5} = \frac{12}{15} : \frac{9}{15} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

- 3.1** Para cada producción, indica si la consideras matemáticamente correcta (adecuada) o no, justificando el razonamiento matemático evidenciado. ¿Existen otras formas de resolver la división de fracciones?
- 3.2** Proporciona retroalimentación constructiva a cada estudiante, es decir, da sentido a sus soluciones de modo que le ayude a construir su conocimiento matemático.
- 3.3** ¿Cuál de las formas anteriores seleccionarías para enseñar a tus alumnos? Justifica tu respuesta.

Sobre la edición

Dinazar Isabel Escudero-Ávila

Licenciada en Física y Matemáticas por el Instituto Politécnico Nacional; maestra en Matemática Educativa por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (México), y doctora en Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas por la Universidad de Huelva (España). Formadora de maestros de Educación Infantil y Primaria en el área de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid desde 2021. Pertenece a diversos grupos de investigación, como el de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas (DESYM, HUM168) y la Red Iberoamericana de investigación sobre conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas (Red MTSK), de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP). Su principal línea de investigación es el conocimiento y el desarrollo profesional del profesor de Matemáticas, así como el desarrollo del modelo MTSK.

Nuria Climent Rodríguez

Licenciada en Matemáticas y doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Huelva. Catedrática en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. Tiene dilatada experiencia como formadora de profesorado de Primaria y Secundaria en relación con la enseñanza de las matemáticas, en formación inicial y continua. Su investigación se enmarca en la línea del conocimiento y desarrollo profesional del profesor de Matemáticas. Ha sido presidenta de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) de septiembre de 2022 a agosto de 2025, es miembro activo del grupo de investigación DESYM (HUM168) y participa en proyectos de investigación colaborativa con profesores de distintos niveles educativos, así como en proyectos de investigación financiados por programas de I+D+i nacionales, europeos y del Gobierno de México.

María Cinta Muñoz-Catalán

Maestra en Educación Primaria, licenciada en Psicopedagogía y doctora en el área de Didáctica de la Matemática con mención europea. Lleva veinte años formando al profesorado de Educación Infantil y Primaria en relación con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Actualmente es profesora titular del área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Sevilla. Lidera el Grupo de Investigación en Educación Matemática (FQM-226) y es miembro del Instituto Interuniversitario Andaluz de Investigación Educativa (IEDU) y de la Red Iberoamericana de investigación sobre conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas (Red MTSK) de la AUIP. Su investigación se enmarca en la línea del desarrollo y conocimiento profesional del profesorado de Matemáticas de Educación Infantil y Primaria.

Juan Pedro Martín-Díaz

Graduado en Educación Primaria y profesor permanente laboral del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. Investigador en formación y conocimiento del profesorado de Matemáticas y formador de maestros de Educación Primaria desde el año 2016. Doctor por la Universidad de Huelva con una tesis centrada en el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas en la formulación de problemas. Pertenece al Centro de Investigación en Pensamiento Contemporáneo e Innovación para el Desarrollo Social (COIDESO) y al grupo de investigación DESYM (HUM168). Sus principales líneas de investigación se centran en la formación inicial de maestros, la didáctica de las matemáticas, el diseño de tareas y el modelo de conocimiento especializado MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*).

Índice de tablas y figuras

Índice de tablas

Tabla 1. Dominios, subdominios y categorías de conocimiento del modelo MTSK	12
Tabla 1.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo»	35
Tabla 1.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo»	36
Tabla 1.3. Atributos de una definición matemática	37
Tabla 1.4. Imágenes del rectángulo	38
Tabla 1.5. ¿Es o no un ejemplo de rectángulo?	39
Tabla 1.6. Propiedades de las figuras geométricas	40
Tabla 1.7. Propiedades relevantes, irrelevantes e incorrectas del concepto de rectángulo	40
Tabla 2.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Introducción a la suma con fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de modelo de áreas»	58
Tabla 2.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Introducción a la suma con fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de modelo de áreas».	59
Tabla 3.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Interpretación parte-todo de las fracciones».	78
Tabla 3.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Interpretación parte-todo de las fracciones»	79
Tabla 4.1. Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Evaluación del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas construido a través de la formulación de problemas de fracciones»	90

Tabla 5.1. Resultados hipotéticos del experimento de la actividad	101
Tabla 5.2. Conocimiento matemático y didáctico del contenido asociado a la tarea «Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción»	104
Tabla 5.3. Supuesto resultado del experimento	109
Tabla 6.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo»	123
Tabla 6.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo»	124
Tabla 6.3. Características del TEA descritas en la literatura	131
Tabla 7.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Definición de polígono»	143
Tabla 7.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Definición de polígono»	143
Tabla 8.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza»	162
Tabla 8.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza»	163
Tabla 9.1. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia»	191
Tabla 9.2. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia»	192
Tabla 10.1. Temáticas para asignar a los equipos.	200
Tabla 10.2. Conocimiento matemático asociado a la tarea «¿Dónde están los polígonos en los poliedros?»	205
Tabla 10.3. Conocimiento didáctico asociado a la tarea «¿Dónde están los polígonos en los poliedros?»	205
Tabla 11.1. Cronograma de tareas.	221
Tabla 11.2. Definiciones de rotación encontradas por el profesor Mario	223
Tabla 11.3. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Atribuyendo significado a la rotación».	239
Tabla 11.4. Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Atribuyendo significado a la rotación»	240
Tabla 12.1. Nomenclatura de distintos algoritmos para la división de fracciones	250
Tabla 12.2. Conocimiento matemático asociado a la tarea «Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado	

en formación de matemáticas en el contexto de división de fracciones a través de una tarea de formación»	261
Tabla 12.3 Conocimiento didáctico del contenido asociado a la tarea «Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación de matemáticas en el contexto de división de fracciones a través de una tarea de formación»	262

Índice de figuras

Figura 1. <i>Mathematics Teacher's Specialised Knowledge</i> (MTSK), con sus dominios y subdominios.	10
Figura 1.1. Ejemplos de figuras geométricas que podrían o no ser rectángulos	24
Figura 1.2. Ficha de EI sobre el rectángulo	30
Figura 1.3. Contraejemplos del rectángulo: figuras no cerradas	31
Figura 1.1. Ejemplos de figuras geométricas que podrían o no ser rectángulos	38
Figura 1.2. Ficha de EI sobre sobre el rectángulo.	42
Figura 2.1. Ejemplo de unidades marcadas como plantilla y piezas recortadas	51
Figura 5.1. Comparación entre apuestas respecto de la distancia a la bola roja	95
Figura 5.2. Situación inicial de ausencia total de información sobre la localización del saco rojo: (a) la urna mental; (b) la mejor apuesta.	102
Figura 5.3. Situación de la información sobre la localización del saco rojo tras obtener la muestra, suponiendo independencia entre las direcciones vertical y horizontal: (a) urnas mentales sobre cada dirección; (b) la mejor apuesta	103
Figura 6.1. Material manipulativo (piezas de goma EVA), pictogramas y organizadores gráficos	114
Figura 6.2. Forma en que se apilan los cajones.	125
Figura 6.3. Escalones flotantes de Raúl.	127
Figura 6.4. Estrategia de las flechas	127
Figura 6.5. Representación de la estrategia de Raúl (figura 6.4).	127
Figura 6.6. Secuencia de Raúl	128
Figura 7.1. Formas planas: polígono frente a no polígono.	139
Figura 7.1. Formas planas: polígono frente a no polígono.	144
Figura 8.1. Viñeta 1.	156
Figura 8.2. Viñeta 2	156
Figura 8.3. Viñeta 3	157

Figura 8.4. Viñeta 4	158
Figura 8.5. Viñeta 5	158
Figura 8.6. Viñeta 6	159
Figura 11.1. Ejemplos del uso del «mira»	229
Figura 11.2. Ejemplos de rotación en la situación 2 de la tarea para el alumno, con distintos centros y sentidos.	234
Figura 12.1. Ejemplos de representación de la división de fracciones con material manipulativo.	255
Figura 12.2. Procesos de resolución de divisiones de fracciones	257

Índice

Presentación	9
1. Construcción de una definición en Educación Infantil: el caso del rectángulo	19
Fundamentación	19
Objetivos generales.	21
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias	21
Orientaciones generales para quien dirige la formación	22
Recursos físicos o virtuales	22
Referencias	33
2. Introducción a la suma de fracciones. Reflexión didáctica sobre el uso de un modelo de áreas	45
Fundamentación	45
Objetivos generales.	46
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias	47
Orientaciones generales para quien dirige la formación	47
Recursos físicos o virtuales	48
Referencias	57
3. Interpretación parte-todo de las fracciones	67
Fundamentación	67
Objetivos generales	69
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias	69
Orientaciones generales para quien dirige la formación	69
Recursos físicos o virtuales	70
Ruta complementaria para extender la tarea	77
Referencias	77

4. Evaluación del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas construido a través de la formulación de problemas de fracciones	85
Fundamentación	85
Objetivos generales.	86
Conocimientos, habilidades o competencias previas	86
Orientaciones generales para quien dirige la formación	86
Referencias	88
5. Construcción de razonamiento probabilístico a través de la predicción	93
Fundamentación	93
Objetivos generales.	95
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias	96
Orientaciones generales para quien dirige la formación.	96
Recursos físicos o virtuales	96
Referencias	103
6. El problema de la arqueóloga. Resolución de problemas de generalización desde un enfoque inclusivo	111
Fundamentación	111
Objetivos generales.	113
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias	113
Orientaciones generales para quien dirige la formación	113
Recursos físicos o virtuales	113
Referencias	121
7. Definición de polígono	135
Fundamentación	135
Objetivos generales	136
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias	136
Orientaciones generales para quien dirige la formación	137
Recursos físicos o virtuales	138
Actividades que conforman la tarea	138
Referencias	141
8. Reconstrucción de la definición de polígono para su enseñanza	151
Fundamentación	151
Objetivos generales.	153
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias	153
Orientaciones generales para quien dirige la formación	153
Recursos físicos o virtuales	154
Referencias	160

9. Procesos de conjeturación, razonamiento y demostración usando relaciones angulares: ángulo inscrito en la circunferencia	173
Fundamentación	173
Objetivos generales.	176
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias . . .	177
Orientaciones generales para quien dirige la formación.	177
Recursos físicos o virtuales	178
Referencias	189
10. ¿Dónde están los polígonos en los poliedros?	195
Fundamentación	195
Objetivos generales.	196
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias . . .	197
Orientaciones generales para quien dirige la formación.	197
Recursos físicos o virtuales	198
Referencias	203
11. Atribuyendo significado a la rotación.	217
Fundamentación	217
Objetivos generales de la tarea.	218
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias . . .	219
Orientaciones generales para quien dirige la formación	219
Recursos físicos o virtuales	220
Actividades que conforman la tarea.	220
Referencias	237
12. Conocimiento especializado e interpretativo del profesorado en formación de matemáticas en el contexto de división de fracciones.	245
Fundamentación	245
Objetivos generales.	246
Conocimientos, habilidades o competencias previas necesarias . . .	247
Orientaciones generales para quien dirige la formación.	247
Recursos físicos o virtuales	248
Referencias	259
Sobre la edición.	267
Índice de tablas y figuras.	269

Tareas para la formación del profesorado para enseñar matemáticas

Este libro está dirigido a formadores y formadoras de profesorado de Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria con compromiso con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En sus páginas encontrarán doce tareas formativas diseñadas, analizadas e implementadas por especialistas en didáctica de la matemática que se dedican también a la formación inicial y continua del profesorado en distintos contextos educativos.

Las propuestas que se presentan tienen como objetivo favorecer la construcción de conocimiento especializado del profesorado que imparte matemáticas. Cada tarea se centra en un contenido matemático y en un nivel educativo determinado, ofreciendo un recurso fundamentado y transferible a la práctica formativa. A lo largo del libro se abordan contenidos clave numéricos, geométricos y probabilísticos, junto con aspectos transversales como el razonamiento y la resolución y formulación de problemas.

Estas tareas han sido elaboradas por un equipo internacional de investigadores e investigadoras con vinculación a universidades españolas y latinoamericanas, miembros de la red de investigación MTSK (*Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*). Desde esta perspectiva, las tareas promueven el desarrollo del conocimiento matemático, el conocimiento didáctico del contenido y las concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Sin embargo, el libro ha sido concebido para ser accesible a todo formador o formadora, independientemente de su familiaridad con el modelo MTSK. Así, quienes se aproximan por primera vez a esta perspectiva encontrarán propuestas claras y aplicables, mientras que los lectores más especializados podrán profundizar en el análisis del conocimiento profesional implicado en cada tarea.